



**UnB-Universidade de Brasília**

IE-Instituto de Ciências Exatas  
MAT-Departamento de Matemática



## **DECLARAÇÃO**

Declaramos, a pedido e para os devidos fins, que o professor Newton Mayer Solórzano Chavéz executou o projeto de pós-doutorado no Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade de Brasília, sob a supervisão da professora Ketí Tenenblat, no período de 01 de março de 2021 a 01 de março de 2022.

Brasília, 03 de março de 2022.

*Ingrid de Sousa Andrade*  
Técnica em Assuntos  
Educacionais Pós MAT/UnB  
Matrícula: 1105485

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA - UNB

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ilmo. Sr.

Prof. Dr. Luciano Calheiro Lapas

Universidade Federal da Integração Latino-Americana

Foz do Iguaçu, PR

Brasil

Brasília, 03 de março de 2022

Prezado Prof. Luciano Calheiros Lapas

Venho por meio desta declarar que o professor Newton Mayer Solórzano Chávez realizou as atividades de Pós-doutorado em nossa instituição sob a minha supervisão de forma remota por causa da pandemia, no período de 01/03/2021 a 01/03/ 2022.

O professor desenvolveu trabalhos de pesquisa nos seguintes temas: “Superfícies mínimas na métrica euclidiana perturbada”, “Métricas Warped do tipo Douglas” e “Sobre as métricas cilindricamente simétricas do tipo Douglas”. Um trabalho já foi submetido para publicação em periódico internacional com corpo editorial e revisor e outros dois estão em fase de elaboração, para posterior submissão para publicação.

Além disso, o professor Newton participou das seguintes atividades de geometria diferencial na UNB: 1. Seminários de geometria coordenado pelo professor João Paulo dos Santos e 2. Tópicos de matemática sob a minha coordenação. Durante o programa de pós-doutorado ele proferiu um total de 5 seminários e participou de diversos eventos científicos.

Atenciosamente,



Keti Tenenblat

MAT-UNB

# CERTIFICADO

Certificamos que o prof. Dr. **Newton Mayer Solórzano Chávez** ministrou a conferência "*On spherically symmetric Finsler metric with scalar and constant flag curvature*", no Seminário de Geometria, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, no dia de 13 de abril de 2021, com carga horária de **6 horas**.



Coordenador da ação  
Benedito Leandro



Diretor do IME/UFG  
Maurício Donizetti Pieterzack



Universidade Federal do Amazonas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas

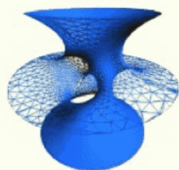


## CERTIFICADO

Certificamos que **Newton Mayer Solórzano Chávez**, participou com êxito do evento **Manaus conference to celebrate Renato Tribuzy's 75th Birthday** realizado no período de 28 a 30/04/2021, contabilizando carga horária total de 20 horas.

Manaus, 30 de Abril de 2021

Flávia Morgana de Oliveira Jacinto  
Integrante da Comissão Organizadora



33<sup>o</sup> Colóquio  
Brasileiro de  
Matemática  
2-6 de agosto 2021

CERTIFICADO

Certifico que, **Newton Mayer Solórzano Chávez**, , participou do “33<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática”, que foi realizado online pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, Agosto 02 – 06, 2021

Rio de Janeiro, 06 de Agosto de 2021

*Carolina B. Araújo*

Carolina Araújo  
Coordenadora Geral



**UnB-Universidade de Brasília**

IE-Instituto de Ciências Exatas  
MAT-Departamento de Matemática



## **Declaration Letter**

Date: march 03, 2022

To whom it may concern.

This is to certify that Newton Solórzano (Universidade Federal da Integração Latino-Americana) gave a lecture entitled "On Douglas warped product metrics" in the Geometry Seminar of the Mathematics Department at Universidade de Brasília, on October 13, 2021.

*Ingrid de Sousa Andrade*  
Técnica em Assuntos  
Educacionais Pós MAT/UnB  
Matricula: 1105485

---

Campus Universitário Darcy Ribeiro  
ICC Centro – Bloco A- Sl. AT422/15 Térreo  
Brasília- DF/ CEP: 70.910-900

Telefone: (061) 3107-6482/3107-6480

# MINIMAL SURFACES IN PERTURBED EUCLIDEAN METRIC

**ABSTRACT.** In this paper we study minimal hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$  with respect to Busemann-Hausdorff measure in a class of Finsler  $n$ -spaces  $(\mathbb{R}^n, \tilde{F}_b = \hat{\alpha} + \hat{\beta})$ , called Randers spaces, where  $\hat{\alpha}$  is the euclidean metric and  $\hat{\beta} = b(x)dy^n$  is a one form. We investigate the graphs defined on  $xy$ -plane which are invariant under one-dimensional groups of isometry of  $(\mathbb{R}^3, \tilde{F}_b)$ . These groups reduce the minimal graph equation to an ODE. We obtain a class of new explicit examples of minimal surfaces in Finsler Geometry.

## 1. INTRODUCTION

Finsler metrics are more general than Riemannian metrics since the tangent norms need not be induced by inner products. Nonetheless it is natural to study Riemannian properties in Finsler geometry. For instance, minimal surfaces in Riemannian manifold is one of the great topics of research interest. In Finsler space there are two well known volume forms, the B-H (Busseman-Hausdorff) and the H-T (Holmes-Thompson) volume form. Some advances in the search for minimal surfaces in this two Finslerian volume forms were made.

In recent years, there has seen much interest and increased research activities in the Finsler geometry of submanifolds. Using the Busseman-Hausdorff volume form, Z. Shen introduced the notion of mean curvature for Finslerian submanifolds and obtained some global and local results (see [11]). Later, Q. He and Y. B. Shen [9] used the Holmes-Thompson volume form to introduce another notion of mean curvature they obtained examples of minimal surface of rotation in a special Minkowsky  $(\alpha, \beta)$ -metric. The corresponding Bernstein type theorems for minimal surfaces were established in [3], [8] and [15]. It is worth to point out the local rigidity theorem that was obtained in [17].

At this stage, the construction of examples is helpful for the development of Finslerian theory of minimal surfaces. In the pioneer work [16] the authors proved the existence and uniqueness (up to homothety) of the forward complete BH-minimal rotational surface in a Minkowsky special Randers space. In particular, surfaces described in [16] are explicitly given. This surface is invariant under the symmetry of rotation around  $z$ -axis. Moreover, in [7] the authors considered Minkowski  $(\alpha, \beta)$ -space and gave the explicit expressions of rotational minimal surfaces. In Randers space, a well known fact is that the HT-minimal surfaces are the same minimal surfaces in the Euclidean space (cf. [8]). The first nontrivial (non-Euclidean) HT-minimal rotational surface in a class of Minkowski  $(\alpha, \beta)$ -spaces was found in [10]. More examples in Minkowsky Finsler spaces was studied in [4], [6], [5], [9], [7].

However, there exist a few examples of minimal surfaces in not Minkowsky Finsler spaces. The first BH-minimal rotational surfaces in special not Minkowsky Randers space was studied in [14], still now a few new examples are founded and studied: [6], [5].

In Rander space there are two forms to calculate mean curvature, the first one is using Riemannian metric  $\alpha$  and an one form  $\beta$ , and the second form is using navigation data ([4] [6] [5]). In this paper we use the firs method considering an euclidean metric  $\sqrt{\delta_{\nu\gamma}y^\nu y^\gamma}$  perturbed by an 1-form  $b(x)y^{n+1}$ , we saw that it is more convenient to use the first technique, and then study minimal surfaces with respect to Busemann-Hausdorff measure in a special cases of ‘non Minkowski-Randers’ spaces. In contrast to examples obtained in [6] and [14]

---

*Date:* March 4, 2022.

*2010 Mathematics Subject Classification.* 53B40, 53C60, 58B20.

*Key wrds and phrases.* Finsler metric, minimal surfaces, Randers metric.

5. FOR SOME  $F_b$ , THE SPHERE IS MINIMAL

**Example 8.** Let  $c : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  and  $\mathcal{L}_2 : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  some smooth functions with  $c^2 < 1$ , such that

$$(5.1) \quad \frac{3}{2}r^2(1 - r^2c^2(r))\frac{d}{dr}\mathcal{L}_2(f(r)) = \frac{d}{dr}\left[r^2\sqrt{(1 - r^2c^2(r))(3c^2(r) - 1 - 2r^2c^2(r))}\right],$$

where  $f(r) = \sqrt{1 - r^2}$ , and  $a > 1$ .

Defining  $b(\tilde{x})$  as:

$$(5.2) \quad b^2(\tilde{x}) = c^2(\sqrt{(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2}) - \mathcal{L}_2(f(\sqrt{(\tilde{x}^1)^2 + (\tilde{x}^2)^2})) + \mathcal{L}_2(\tilde{x}^3),$$

we have that the sphere centered at the origin with radius 1, is BH-minimal considering the Randers metric  $F_b = y + b(\tilde{x})y^3$ .

For example, we can consider  $c(r) = \frac{r^2}{2} + \frac{1}{3}$  in (5.1), then we obtain

$$(5.3) \quad \mathcal{L}_2(f(r)) = 2\sqrt{6}\sqrt{6 - 2r^2 - 3r^4} + \frac{25\sqrt{2}}{4} \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{19}}(r^2 + \frac{1}{3})\right) + \frac{9}{2\sqrt{6}} \frac{4 - 3r^2}{\sqrt{6 - 2r^2 - 3r^4}}$$

## REFERENCES

- [1] Bao, D., Chern, S.S., Shen, Z., *An introduction to Riemann-Finsler Geometry*, GTM **200**, Springer-Verlag, (2000).
- [2] Bao, D.; Robles, C.; Shen, Z. - *Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **66**, 377-435 (2004).
- [3] Cui, N., Shen, Y.B., *Bernstein type theorems for minimal surfaces in  $(\alpha, \beta)$ -space*, Public Math. Debrecen **74**, 383-400 (2009).
- [4] Cui, N. - *On minimal surfaces in a class of Finsler 3-spheres*, Geom. Dedicata **168**, 87-100 (2014).
- [5] Cui, N. - *Minimal surfaces in a Randers sphere with the rotational Killing vector field*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **441**, 364 - 374 (2016).
- [6] Cui, N.; Shen, Y.-B. - *Nontrivial minimal surfaces in a hyperbolic Randers space*, Math. Nachr., **290**: 570-582 (2017).
- [7] Cui, N.; Shen, Y. B. - *Minimal rotational hypersurfaces in Minkowski  $(\alpha, \beta)$ -space*, published online in Geometriae Dedicata., **151**:27-39 (2011).
- [8] He, Q.; Shen, Y. B. - *On Bernstein type theorem in Finsler geometry with volume form induced from sphere bundle*, Proc. Amer. Math. Soc. **134**, 871-880 (2006).
- [9] He, Q.; Shen, Y. B. - *On the mean curvature of Finsler submanifolds*, Chin. Ann. of Math. **27A**, 663-674 (2006).
- [10] He, Q.; Yang, W. - *Volume forms and minimal surfaces of rotation in Finsler spaces with  $(\alpha, \beta)$ -metrics*, International Journal of Mathematics, **21** (2010) 1401-1411.
- [11] Shen, Z. - *On Finsler geometry of submanifolds*, Math. Ann. **311**, 549-576 (1998).
- [12] Shen, Z. - *Lectures on Finsler Geometry*, World Sci., Singapore (2001).
- [13] Silva, R., Tenenblat, K. - *Helicoidal Minimal Surfaces in a Finsler Space of Randers Type*, Canadian Mathematical Bulletin, **57**(4), 765-779 (2014).
- [14] Silva, R.; Tenenblat, K. - *Minimal Surfaces in a cylindrical region of  $R^3$  with a Randers metric*, Houston J. Math. **37** (2011), no. 3, 745-771.
- [15] Souza, M.; Spruck, J.; Tenenblat, K. - *A Bernstein type theorem on a Randers space*, Math. Ann. **329**, 291-305(2004).
- [16] Souza, M.; Tenenblat, K. - *Minimal Surfaces of Rotation in a Finsler Space with a Randers Metric*, Math. Ann. **325**, 625-642 (2003).
- [17] Wu, B. - *A local rigidity theorem for minimal surfaces in Minkowski 3-space of Randers type*, Ann. Glob. Anal. Geom. **31**, 375-384 (2007).

UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA - AVENIDA SILVIO AMERICO SASDELLI, 1842 - VILA A. EDIFÍCIO COMERCIAL LORIVO - CEP: 85866-000 - CAIXA POSTAL 2044 - FOZ DO IGUAÇU - PARANÁ.  
Email address: newton\_chavez@unila.edu.br<sup>1</sup>

# ON DOUGLAS WARPED PRODUCT METRICS

NEWTON MAYER SOLÓRZANO CHÁVEZ

ABSTRACT. We study the new warped metric proposed recently by P. Marçar and S. Shen. We obtain the differential equation of such metrics with vanishing Douglas curvature. By solving this equation, we obtain all Douglas warped product metrics. We show that Douglas, Landsberg and Berwald warped product metrics are equivalent. We prove that Douglas Ricci-flat metrics are locally projectively flat. Examples are included.

## 1. INTRODUCTION

A Finsler metric on a manifold  $M$  is a *Douglas metric* if its Douglas curvature vanishes identically. The Douglas curvature was introduced by J. Douglas [3] in 1927. Its importance in Finsler geometry is due to the fact that it is a projective invariant. Namely, if two Finsler metrics  $F$  and  $\bar{F}$  are projectively equivalent, then  $F$  and  $\bar{F}$  have the same Douglas curvature.

The class of Douglas metrics contains all Riemannian metrics and the locally projectively flat Finsler metrics. However, there are many Douglas metrics which are not Riemannian. There are also many Douglas metrics which are not locally projectively flat.

The warped product metric was introduced by Bishop and O'Neil [1] to study Riemannian manifolds of negative curvature, as a generalization of Riemannian product metrics. The notion of warped products was extended to the case of Finsler manifolds [2, 5]. These metrics are called *Finsler warped product metrics*. In [2], it was observed that spherically symmetric Finsler metrics are actually warped product metrics. In [6], the authors used this observation and gave all the complete characterization of Douglas Finsler warped product metrics and some new Douglas metrics of this type were produced by using known spherically symmetric Douglas metrics given in [8].

Recently, in [7], the authors considered a new class of Finsler metrics using the warped product notion introduced by Chen, S. and Zhao [2], with another ‘warping’, one that is consistent with static spacetime. They gave the PDE characterization for the proposed metrics to be Ricci-flat and they explicitly constructed two non-Riemannian examples. In this paper, we characterize such metrics with vanishing Douglas curvature in terms of a differential equation. Then, by solving this equation, we obtain all Douglas warped product metrics (Theorem 2). We also obtain the Berwald curvature and the Landsberg curvature, concluding that Douglas, Landsberg and Berwald warped product metrics are equivalent (Corollary 1). Additionally, we characterize the Ricci-flat Douglas warped product metrics and we conclude that they are locally projectively flat.

## 2. PRELIMINARIES

In this section, we give some notations, definitions and lemmas that will be used in the proof of our main results. Let  $M$  be a manifold and let  $TM = \cup_{x \in M} T_x M$  be the tangent bundle of  $M$ , where  $T_x M$  is the tangent space at  $x \in M$ . We set  $TM_o := TM \setminus \{0\}$  where  $\{0\}$

---

*Date:* March 4, 2022.

*2020 Mathematics Subject Classification.* 53B40, 53C60.

*Key words and phrases.* Finsler metric, warped product, Douglas metric.

**Example 4.** Considering  $G(t) = \frac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}} + 2t$  in (3.15), the following Finsler metric

$$F(x, y) = \frac{\left(\sqrt{g^2(\bar{x})(y^0)^2 + \bar{y}^2} + g(\bar{x})y^0\right)^2}{\sqrt{g^2(\bar{x})(y^0)^2 + \bar{y}^2}},$$

is of Douglas type, where  $g$  is a positive arbitrary differentiable function.

**Example 5.** Considering  $h(t) = (t^2 + 1)^{-3}$  and  $c = 1$  in Corollary 1, the following Finsler metric

$$F(x, y) = \frac{3y^0}{8} \arctan\left(g(\bar{x})\frac{y^0}{\bar{y}}\right) + \frac{8g^2(\bar{x})(y^0)^2 + 7\bar{y}^2}{8g(\bar{x})(g^2(\bar{x})(y^0)^2 + \bar{y}^2)}\bar{y},$$

is of Douglas type, where  $g$  is a positive arbitrary differentiable function. Observe that, we can use any constant  $c \geq 1/4$ .

**Acknowledgements.** I would like to thank Prof. Ketí Tenenblat for helpful conversations during my postdoctoral project at the Universidade de Brasília (Brazil). Her suggestions were invaluable.

#### DECLARATIONS

**Conflict of interest.** The authors declare that they have no conflict of interest.

#### REFERENCES

- [1] Bishop, R.L., O'Neill, B.: *Manifolds of negative curvature*. Trans. Amer. Math. Soc. **145**, 1-49 (1969). <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0251664-4>
- [2] Chen, B., Shen, Z., Zhao, L.: *Constructions of Einstein Finsler metrics by warped product*. International Journal of Mathematics, **29**(11): 1850081 (2018) <https://doi.org/10.1142/S0129167X18500817>
- [3] Douglas, J.: *The general geometry of paths*. Ann. Math. **29**, 143-168 (1927-28).
- [4] Huang, L., Mo, X.: *Projectively flat Finsler metrics with orthogonality invariance*. Ann. Polon. Math. **107**, 259-270 (2013). <https://doi.org/10.4064/ap107-3-3>
- [5] Kozma, L., Peter, R., Varga, C.: *Warped product of Finsler manifolds*. Ann. univ. Sci. Budapest **44**, 157-170 (2001).
- [6] Liu, H., Mo, X.: *Finsler Warped Product Metrics of Douglas Type*. Canadian Mathematical Bulletin, **62**(1), 119-130 (2019). <https://doi.org/10.4153/CMB-2017-077-0>
- [7] Marcal, P., Shen, Z.: *Ricci flat Finsler metrics by warped product*. Preprint, arXiv:2012.05699.
- [8] Mo, X., Solorzano, N. M., Tenenblat, K.: *On spherically symmetric Finsler metrics with vanishing Douglas curvature*. Differential Geom. Appl. **31**, 746-758 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2013.09.002>
- [9] Zhou, L.: *Spherically symmetric Finsler metrics in  $R^n$* . Publ. Math. Debrecen **80**(1-2), 67-77 (2012).

UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA - AVENIDA SILVIO AMÉRICO SASDELLI, 1842  
- VILA A. EDIFÍCIO COMERCIAL LORIVO - CEP: 85866-000 - CAIXA POSTAL 2044 - FÓZ DO IGUAÇU - PARANÁ.  
Email address: nmayer159@gmail.com

# (PROVISIONAL TITLE) ON CYLINDRICAL SYMMETRIC DOUGLAS METRICS

NEWTON SOLÓRZANO

ABSTRACT. We study the cylindrical symmetric finsler metric .... We obtain the differential equation of such metrics with vanishing Douglas curvature. By solving this equation.... Examples are included.

## 1. INTRODUCTION

A Finsler metric on a manifold  $M$  is a *Douglas metric* if its Douglas curvature vanishes identically. The Douglas curvature was introduced by J. Douglas [3] in 1927. Its importance in Finsler geometry is due to the fact that it is a projective invariant. Namely, if two Finsler metrics  $F$  and  $\bar{F}$  are projectively equivalent, then  $F$  and  $\bar{F}$  have the same Douglas curvature.

There exist important metrics in the literature, as Shen metric on  $\mathbb{R}^3$ :

$$(1.1) \quad \frac{\sqrt{(-x^2y^1 + x^1y^2)^2 + ((y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2)(1 - (x^1)^2 - (x^2)^2)}}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2} - \frac{x^2y^1 - x^1y^2}{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2}$$

or metrics founded in [2, 5, 7]

## 2. PRELIMINARIES

In this section, we give some notations, definitions and lemmas that will be used in the proof of our main results. Let  $M$  be a manifold and let  $TM = \cup_{x \in M} T_x M$  be the tangent bundle of  $M$ , where  $T_x M$  is the tangent space at  $x \in M$ . We set  $TM_o := TM \setminus \{0\}$  where  $\{0\}$  stands for  $\{(x, 0) \mid x \in M, 0 \in T_x M\}$ . A *Finsler metric* on  $M$  is a function  $F : TM \rightarrow [0, \infty)$  with the following properties

- (a)  $F$  is  $C^\infty$  on  $TM_o$ ;
- (b) At each point  $x \in M$ , the restriction  $F_x := F|_{T_x M}$  is a Minkowski norm on  $T_x M$ .

Let  $\mathbb{B}^n(\rho) \subset \mathbb{R}^n$  the  $n$  dimensional open ball of radius  $\rho$  and centered at the origin ( $n \geq 2$ ). Set  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{B}^n(\rho)$ , with coordinates on  $TM$

$$(2.1) \quad x = (x^0, \bar{x}), \quad \bar{x} = (x^1, \dots, x^n),$$

$$(2.2) \quad y = (y^0, \bar{y}), \quad \bar{y} = (y^1, \dots, y^n).$$

Consider the Finsler metric  $F$  defined on  $M$  such that

$$(2.3) \quad F((x^0, O\bar{x}), (y^0, O\bar{y})) = F((x^0, \bar{x}), (y^0, \bar{y}))$$

for every orthogonal  $n \times n$  matrix  $O$ .

Inspired by [9], (see also [4]) we show the following:

---

*Date:* March 4, 2022.

*2020 Mathematics Subject Classification.* 53B40, 53C60.

*Key words and phrases.* Finsler metric, warped product, Douglas metric.

Let  $\Theta = \Theta(s, z)$ , any differentiable function, denoting  $\Gamma(A) = 2A + zA_z + sA_s$ , we have

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y^0} \Theta &= \frac{1}{u} \Theta_z \\
\frac{\partial}{\partial y^l} \Theta &= \frac{1}{u} [\Theta_s x^l - (z\Theta_z + s\Theta_s)u_l] \\
\frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^l} \Theta &= \frac{1}{u^2} [\Gamma(z\Theta_z - s\Theta_s)u_k u_l + \Theta_{ss} x^l x^k - (\Gamma(\Theta_s) - \Theta_s)(x^l u_k + x^k u_l) - (z\Theta_z - s\Theta_s)\delta^{kl}] \\
u^3 \frac{\partial}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l} \Theta &= - (6(z\Theta_z + s\Theta_s) - \Gamma(z(z\Theta_z + s\Theta_s)_z + s(z\Theta_z + s\Theta_s)_s))u_j u_k u_l \\
&\quad + [\Gamma((z\Theta_z + s\Theta_s)_s) - (z\Theta_z + s\Theta_s)]u_j u_k x^l \\
&\quad + [3\Theta_s + (z\Theta_{sz} + s\Theta_{ss}) + \Gamma(z\Theta_{sz} + s\Theta_{ss})]u_k u_l x^j \\
&\quad + [\Gamma((z\Theta_z + s\Theta_s)_s)]u_j u_l x^k \\
&\quad - [\Gamma(A_{ss})]x^j x^k u_l - [\Gamma(A_{ss}) - A_{ss}] \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

□

**Acknowledgements.** I would like to thank Prof. Ketten Tenenblat for helpful conversations during my postdoctoral project at the Universidade de Brasília (Brazil). Her suggestions were invaluable.

#### REFERENCES

- [1] Bishop, R.L., O'Neill, B.: *Manifolds of negative curvature*. Trans. Amer. Math. Soc. **145**, 1-49 (1969). <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0251664-4>
- [2] Chen, B., Shen, Z., Zhao, L.: *Constructing Einstein Finsler metrics by warped product*, International Journal of Mathematics, **29**(11): 1850081 (2018) <https://doi.org/10.1142/S0129167X18500817>
- [3] Douglas, J.: *The general geometry of paths*. Ann. Math. **29**, 143-168 (1927-28).
- [4] Huang, L., Mo, X.: *Projectively flat Finsler metrics with orthogonality invariance*, Ann. Polon. Math. **107**, 259-270 (2013). <https://doi.org/10.4064/ap107-3-3>
- [5] Kozma, L., Peter, R., Varga, C.: *Warped product of Finsler manifolds*. Ann. univ. Sci. Budapest **44**, 157-170 (2001).
- [6] Liu, H., Mo, X.: *Finsler Warped Product Metrics of Douglas Type*. Canadian Mathematical Bulletin, **62**(1), 119-130 (2019). <https://doi.org/10.4153/CMB-2017-077-0>
- [7] Marcal, P., Shen, Z.: *Ricci flat Finsler metrics by warped product*. Preprint, arXiv:2012.05699.
- [8] Mo, X., Solorzano, N. M., Tenenblat, K.: *On spherically symmetric Finsler metrics with vanishing Douglas curvature*. Differential Geom. Appl. **31**, 746-758 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2013.09.002>
- [9] Zhou, L.: *Spherically symmetric Finsler metrics in  $R^n$* . Publ. Math. Debrecen **80**(1-2), 67-77 (2012).

UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA - AVENIDA SILVIO AMÉRICO SASDELLI, 1842 - VILA A, EDIFÍCIO COMERCIAL LORIVO - CEP: 85866-000 - CAIXA POSTAL 2044 - FÓZ DO IGUAÇU - PARANÁ.  
Email address: nmayer159@gmail.com

# Um estudo sobre cônicas no espaço de Randers

## 1 Resumo

Neste trabalho estudamos as parábolas na geometria de Funk definida sobre o disco unitário de dimensão dois. São obtidas quatro tipos de parábolas como consequência da não simetria da métrica Funk. Mostramos que dois de elas... Exemplos explícitos são incluídos.

### **Palavras-chave:**

Métrica de Finsler, Métrica de Funk, Problema de navegação, parábolas de Funk

## 2 Introdução

Continuando o espírito de disseminar de maneira amical o estudo de métricas de Finsler iniciada em Chavez et al (2021), no presente trabalho introduzimos a definição de parábolas de Funk.

Em 1931, Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo<sup>1</sup>, propôs o Problema da Navegação de Zermelo, que consistia em um clássico problema de controle ótimo. Estes lidam com um barco navegando em um corpo de água, partindo de um ponto  $A$  até um ponto de destino  $B$ . O barco é capaz de alcançar uma certa velocidade máxima, e procura-se obter o melhor controle possível para alcançar  $B$  no menor tempo possível.

Em Chavez et al (2021) os autores consideram o caso particular onde o domínio é o disco unitário  $\mathbb{B}^2$  centrado na origem e perturbado pelo campo vetorial  $W = (-x_1, -x_2)$ . A fórmula da distância (ou tempo de viagem) nesta situação, chamada

---

<sup>1</sup>E. Zermelo (Berlim, 27 de julho de 1871 – Friburgo, 21 de maio de 1953) foi um matemático e filósofo alemão, cujo trabalho teve influência direta nos Fundamentos da Matemática.

## References

- [1] CAMARGO, I.; BOULOS, P. **Geometria Analítica: Um tratamento vetorial**. São Paulo: Prentice Hall, 3<sup>a</sup> ed. rev. e amp. (2005).
- [2] CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [3] CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [4] CHAVEZ, N. M. S.; LEON, V. A. M.; SOSA, L. G. Q.; MOYSES, J. R. Um problema de navegação de Zermelo: *Metrika de Funk*. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 7, n. 1, p. e3010, 29 mar. 2021.
- [5] CHENG, X.; SHEN, Z. **Finsler Geometry**: An approach via Randers spaces. Beijing-Heidelberg: Science Press Beijing-Springer, 2012.
- [6] CHERN, S. S.; SHEN, Z. **Riemannian-Finsler geometry**. Singapore: World Scientific, 2005.
- [7] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [8] FUNK, P. Über Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind. **Mathematische Annalen**, n. 101, p. 226-237, 1929.
- [9] LIMA, E. L. **Análise Real**. v. 1. Coleção Matemática Universitária. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [10] SHEN, Z. **Lectures on Finsler Geometry**. Singapore: World Scientific, 2001.



---

Emitido em 07/03/2022

**DOCUMENTOS COMPROBATÓRIOS Nº 14/2022 - CONSUNICVN (10.01.06.03)**

**(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)**

***(Assinado digitalmente em 08/03/2022 00:20 )***

**NEWTON MAYER SOLORZANO CHAVEZ**

*PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR*

*ILACVN (10.01.06.03.04)*

*Matrícula: 2193209*

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sig.unila.edu.br/documentos/> informando seu número: **14**, ano: **2022**, tipo: **DOCUMENTOS COMPROBATÓRIOS**, data de emissão: **07/03/2022** e o código de verificação: **d3dd931401**

|                                                     |
|-----------------------------------------------------|
| Processo: 23422.010777/2020-54                      |
| Assunto: Referente ao relatório final de atividades |
| Interessado: NEWTON MAYER SOLORZANO CHAVEZ          |
| Relator: Victor Arturo Martinez Leon                |

### 1. HISTÓRICO:

O processo trata-se do relatório final de afastamento para pós-doutorado, na Universidade de Brasília – UNB, do professor Newton Mayer Solorzano Chaves. O afastamento para estágio de pós-doutoramento é um dos meios pelo qual os docentes podem estabelecer uma rede de pesquisa e inserir-se em grupos com temas similares aos seus próprios objetos de investigação. O relator avaliou se a proposta de trabalho foi seguida e se teve conclusão da pesquisa com base nas informações fornecidas pelo docente.

### 2. FUNDAMENTOS DO PEDIDO:

Conforme RESOLUÇÃO Nº 35/2021/CONSUN DE 16 DE NOVEMBRO DE 2021, Durante o período de afastamento, o servidor terá suas atividades acadêmicas acompanhadas pela unidade de lotação, devendo seus relatórios serem apresentados em reunião do Conselho do Instituto por meio de avaliação da coordenação do Centro Interdisciplinar onde o servidor se encontra alocado, de relator previamente indicado para esse fim, visando assegurar o alinhamento dessas atividades ao planejado, bem como o recebimento, a validação e a disseminação de relatórios semestrais e final, e após será submetido à homologação do CONSUNI.

### 3. CONSIDERAÇÕES:

No presente relatório final, o professor detalha todas as atividades realizadas durante os 12 meses de afastamento. O cronograma de trabalho do docente foi seguido corretamente. Sendo que o professor informou que foi submetido um artigo para uma revista internacional com corpo editorial e revisor, outro artigo está em processo de revisão final para posterior submissão e outros dois artigos foram iniciados. Também o professor informa que participou da disciplina, Tópicos de matemática (liderada pela supervisora), ministrando cinco seminários e participou em cinco eventos científicos (dois deles ministrando palestra e os outros como participante).

## 4. PARECER CONCLUSIVO:

- (X) Aprovar  
( ) Aprovar com alterações  
( ) Não aprovar

## 5. SUGESTÕES E OBSERVAÇÕES

Nenhuma sugestão e observação.

Foz do Iguaçu, 21 de março de 2022.



Victor Arturo Martinez Leon



---

Emitido em 21/03/2022

**RELATORIA Nº 3/2022 - CICN (10.01.06.03.04.04)**

**(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)**

***(Assinado digitalmente em 22/03/2022 10:57 )***

**VICTOR ARTURO MARTINEZ LEON**

*PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR*

*ILACVN (10.01.06.03.04)*

*Matrícula: 1152921*

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sig.unila.edu.br/documentos/> informando seu número: 3, ano: 2022, tipo: **RELATORIA**, data de emissão: 22/03/2022 e o código de verificação: **033a517954**

1 **ATA DA SEXAGÉSIMA SEXTA REUNIÃO ORDINÁRIA DO CENTRO INTERDISCIPLI-**  
2 **NAR DE CIÊNCIAS DA NATUREZA, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO**  
3 **LATINO-AMERICANA, REALIZADA EM DEZENOVE DE ABRIL DE DOIS MIL E VIN-**  
4 **TE E DOIS**-----

5 Aos dezenove dias do mês de abril de dois mil e vinte e dois, às catorze horas, por meio da  
6 plataforma digital – Rede Nacional de Ensino e Pesquisa, reuniram-se os(as) professores(as) que  
7 fazem parte do Centro Interdisciplinar de Ciências da Natureza: Adriana Flores de Almeida (Vice  
8 Coordenadora do curso de Matemática), Alana Fernandes Golin, Aline Theodoro Toci, Cleilton  
9 Aparecido Canal, Edson Massayuki Kakuno, Eralcilene Moreira Terezio, Gustavo de Jesus Lopez  
10 Nunez, José Ricardo Cezar Salgado, Marcela Boroski, Marcelo Gonçalves Hönnicke (Vice  
11 Coordenador do CICN), Márcia Regina Becker (Coordenadora do CICN), Maria das Graças  
12 Cleophas Porto, Newton Mayer Solorzano Chavez, Paula Andrea Jaramillo Araújo (Coordenadora  
13 do curso de Química), Victor Arturo Martinez Leon. Justificativas de ausência: Não houve. Com  
14 quórum legal, iniciou-se a sessão, para discutir e deliberar a pauta, conforme segue. **1. Informes;**  
15 **1.1. Demanda de itens de laboratório 2022 - CALENDÁRIO DE COMPRAS SACT (e-mail**  
16 **informativo da Direção em 31/03/2022); 2. Processo NUP 23422.010777/2020-54: Afastamento**  
17 **para Pós-Doutorado, aprovação do relatório final. Interessado: Newton Mayer Solorzano**  
18 **Chavez - Relator: Victor Arturo Martinez Leon; 3. Decisão da forma de distribuição interna**  
19 **dos recursos ILACVN/CICN (por curso ou área). 1. Informes. 1.1. Demanda de itens de**  
20 **laboratório 2022 - CALENDÁRIO DE COMPRAS SACT (e-mail informativo da Direção em**  
21 **31/03/2022** – A Coordenadora do CICN, professora Márcia, informou que a Direção do Instituto  
22 enviou e-mail no dia 31 de março do corrente, que trata sobre a solicitação dos itens de laboratórios,  
23 e que foi disponibilizada uma planilha online, para que sejam indicadas as demandas, tais demandas  
24 devem ser solicitadas ao Instituto com cópia ao Centro, para que seja unificada posteriormente,  
25 que demais dúvidas estão no corpo do e-mail mencionado, e que o Centro pode esclarecer quaisquer  
26 outras dúvidas que vierem a surgir. **2. Processo NUP 23422.010777/2020-54: Afastamento para**  
27 **Pós-Doutorado, aprovação do relatório final. Interessado: Newton Mayer Solorzano Chavez -**  
28 **Relator: Victor Arturo Martinez Leon** – A professora Márcia solicitou que o professor Victor  
29 apresentasse sua relatoria, referente ao relatório final de atividades do professor Newton. O  
30 professor Victor apresentou a relatoria com parecer favorável, a professora Márcia solicitou a  
31 aprovação da relatoria, colocado em votação via enquete – Todos de acordo – **Aprovado. 3.**  
32 **Decisão da forma de distribuição interna dos recursos ILACVN/CICN (por curso ou área).** –  
33 A professora Márcia disse que o Instituto enviou e-mail em 31 de março do corrente, ratificando a  
34 decisão do CONSUN na reunião de 11 de março, solicitando que os Centros Interdisciplinares  
35 decidam sobre a forma de distribuição dos recursos, sendo que para o CICN foi disponibilizado o  
36 valor de R\$ 12.000,00. A professora Márcia perguntou ao grupo como os docentes achavam  
37 pretendiam dividir o recurso, se por curso ou área. A professora Aline comentou que acha viável que  
38 o valor seja distribuído por curso. A professora Márcia solicitou a aprovação da distribuição dos  
39 recursos, por enquete, sendo a alternativa A, distribuição por área, e a alternativa B, distribuição por  
40 curso, colocado em votação via enquete – Alternativa A: 33% dos votos e a alternativa B: 67% dos  
41 votos, **sendo aprovado a alternativa B: distribuição dos recursos por curso – Aprovado.** E nada  
42 mais havendo a tratar, deu-se por encerrada a reunião às catorze horas e vinte e cinco minutos, da  
43 qual eu Alencar Rodrigues da Silva, lavrei a presente ata, que uma vez aprovada, será assinada por  
44 mim e pelos presentes.



Emitido em 19/04/2022

ATA Nº 5/2022 - null

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 13:26 )**

ADRIANA FLORES DE ALMEIDA  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1692885

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 15:48 )**

ALANA FERNANDES GOLIN  
PROFESSOR VISITANTE  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1903298

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 07:47 )**

ALENCAR RODRIGUES DA SILVA  
ADMINISTRADOR  
DAILACVN (10.01.06.03.04.01)  
Matrícula: 1085297

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 17:07 )**

ALINE THEODORO TOCI  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1653503

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 10:04 )**

CLEILTON APARECIDO CANAL  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1086306

**(Assinado digitalmente em 25/04/2022 22:55 )**

EDSON MASSAYUKI KAKUNO  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1121924

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 10:10 )**

ERALCILENE MOREIRA TEREZIO  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1118217

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 18:29 )**

GUSTAVO DE JESUS LOPEZ NUNEZ  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
CCN (10.01.06.03.04.04.01)  
Matrícula: 2902688

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 11:35 )**

JOSE RICARDO CEZAR SALGADO  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1492219

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 08:39 )**

MARCELA BOROSKI  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1926933

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 10:55 )**

MARCELO GONCALVES HONNICKE  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1571891

**(Assinado digitalmente em 25/04/2022 23:40 )**

MARCIA REGINA BECKER  
COORDENADOR - TITULAR  
CICN (10.01.06.03.04.04)  
Matrícula: 1585820

**(Assinado digitalmente em 27/04/2022 10:10 )**

MARIA DAS GRACAS CLEOPHAS PORTO  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 1832774

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 01:54 )**

NEWTON MAYER SOLORZANO CHAVEZ  
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR  
ILACVN (10.01.06.03.04)  
Matrícula: 2193209

**(Assinado digitalmente em 27/04/2022 11:40 )**

**(Assinado digitalmente em 26/04/2022 12:35 )**

PAULA ANDREA JARAMILLO ARAUJO

*COORDENADOR DE CURSO - TITULAR*

*CQUIM (10.01.06.03.04.04.03)*

*Matrícula: 2182560*

VICTOR ARTURO MARTINEZ LEON

*PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR*

*ILACVN (10.01.06.03.04)*

*Matrícula: 1152921*

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sig.unila.edu.br/documentos/> informando seu número: 5, ano: **2022**, tipo: **ATA**, data de emissão: **25/04/2022** e o código de verificação: **bfaadaafe5**



---

Emitido em 19/04/2022

ATA Nº 6/2022 - CICN (10.01.06.03.04.04)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

*(Assinado digitalmente em 27/04/2022 11:51 )*

ALENCAR RODRIGUES DA SILVA

ADMINISTRADOR

DAILACVN (10.01.06.03.04.01)

Matrícula: 1085297

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sig.unila.edu.br/documentos/> informando seu número: 6, ano: 2022, tipo: ATA, data de emissão: 27/04/2022 e o código de verificação: d5b7df9383