

Economia, Sociedade e Política



# Cônicas: uma abordagem pedagógica com história da matemática

Organizadoras: Elmha Coelho M. Moura

Arlete de Jesus Brito

coleção  
manuALes



**EDUNILA**  
Editora da  
Universidade Federal da  
Integração Latino-Americana

Coleção Manuales

Cônicas: uma abordagem pedagógica com  
história da matemática

Elmha Coelho M. Moura e Arlete de Jesus Brito



**Elmha Coelho M. Moura**

**Arlete de Jesus Brito**

Cônicas: uma abordagem pedagógica com  
história da matemática



© 2022 EDUNILA – Editora Universitária

Catálogo na Publicação (CIP)

C751 Cônicas: uma abordagem pedagógica com história da matemática / Elmha Coelho M. Moura (Org.); Arlete de Jesus Brito (Org.). Foz do Iguaçu: EDUNILA, 2022.  
PDF (53 p.) : il. Col. Manuales.

ISBN: 978-65-86342-28-4

1. Geometria analítica. 2. Cones. 3. História da Matemática. 4. Ensino Médio. I. Moura, Elmha Coelho M. II. Brito, Arlete de Jesus. III Universidade Federal da Integração Latino-Americana - UNILA. IV. Título.

CDU 514.12

Ficha catalográfica elaborada por Leonel Gandi dos Santos CRB11/753

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida, arquivada ou transmitida por qualquer meio ou forma sem prévia autorização por escrito da EDUNILA – Editora Universitária.

EDUNILA – Editora Universitária  
Av. Tancredo Neves, 6731 – Bloco 4  
Caixa Postal 2044  
Foz do Iguaçu – PR – Brasil  
CEP 85867-970  
Fones: +55 (45) 3522-9832  
(45) 3522-9843 | (45) 3522-9836  
editora@unila.edu.br  
www.unila.edu.br/editora



*Dedicamos este manual a todos que se  
interessam por história da matemática  
e educação matemática*



*Fisicamente, habitamos um espaço, mas,  
sentimentalmente, somos habitados  
por uma memória.*

*José Saramago*



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> – Superfície cônica .....	14
<b>Figura 2</b> – Elementos do cone .....	15
<b>Figura 3</b> – Cone de revolução .....	15
<b>Figura 4</b> – Corte perpendicular à geratriz .....	20
<b>Figura 5</b> – Corte transversal do cone .....	23
<b>Figura 6</b> – Cone duplo .....	28
<b>Figura 7</b> – Ângulo de corte .....	32
<b>Figura 8</b> – Passo a passo do traçado da elipse .....	38
<b>Figura 9</b> – Parábola e seus elementos .....	39
<b>Figura 10</b> – Parábola e seus elementos .....	40
<b>Figura 11</b> – Elipse e seus elementos .....	41
<b>Figura 12</b> – Hipérbole e seus elementos .....	42
<b>Figura 13</b> – Parabológrafo caseiro .....	47
<b>Figura 14</b> – Passo a passo para traçar a parábola.....	48
<b>Figura 15</b> – Parabológrafo e a parábola.....	50

## **LISTA DE TABELAS**

<b>Tabela 1</b> – Valor da excentricidade .....	42
---	----

## SUMÁRIO

<b>APRESENTAÇÃO .....</b>	<b>8</b>
<b>PRÁTICA 1 – CORTES TRANSVERSAIS EM TRÊS CONES .....</b>	<b>13</b>
<b>1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>13</b>
<b>2. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>16</b>
<b>2.1 MATERIAIS .....</b>	<b>16</b>
<b>2.2. METODOLOGIA.....</b>	<b>20</b>
<b>3. ATIVIDADES.....</b>	<b>20</b>
<b>PRÁTICA 2 – CORTES TRANSVERSAIS NO MESMO CONE .....</b>	<b>27</b>
<b>1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>27</b>
<b>2. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>29</b>
<b>2.1 MATERIAIS .....</b>	<b>29</b>
<b>2.2 METODOLOGIA.....</b>	<b>32</b>
<b>3. ATIVIDADES.....</b>	<b>32</b>
<b>PRÁTICA 3 – CÔNICAS E LUGARES GEOMÉTRICOS .....</b>	<b>35</b>
<b>1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>35</b>
<b>2. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>37</b>
<b>2.1 MATERIAIS .....</b>	<b>37</b>
<b>2.2. METODOLOGIA.....</b>	<b>37</b>
<b>3. ATIVIDADES.....</b>	<b>39</b>
<b>PRÁTICA 4 – CÔNICAS E GEOMETRIA ANALÍTICA .....</b>	<b>45</b>
<b>1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>45</b>
<b>2. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>46</b>
<b>2.1 MATERIAIS .....</b>	<b>47</b>
<b>2.2. METODOLOGIA.....</b>	<b>47</b>
<b>3. ATIVIDADES.....</b>	<b>49</b>
<b>ALGUMAS PALAVRAS FINAIS .....</b>	<b>51</b>

## APRESENTAÇÃO

A importância da história da matemática como recurso pedagógico no ensino médio pode ser percebida em documentos oficiais, como o Parâmetro Curricular do Ensino Médio (PCNEM+), o qual descreve que, para a contextualização sociocultural da matemática, é necessário:

Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes (BRASIL, 2000, p. 117).

A ideia do uso história da matemática em sala de aula é também ressaltada pela Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio (BRASIL, 2017). O documento declara que as práticas matemáticas de diversas culturas ou grupos variam ao longo do tempo, dependendo das necessidades, visões de mundo, entre outros fatores, e continuam a variar. Está subjacente à compreensão de tais práticas a percepção tanto de diferentes maneiras de criar matemática, quanto de que o caminhar histórico dessa disciplina é fruto do desenvolvimento humano inserido em culturas e sociedades específicas. A atual linguagem matemática possibilita que pessoas de diferentes realidades possam se comunicar; no entanto, povos de diferentes épocas desenvolveram suas próprias maneiras de registros. A BNCC ressalta: “Um dos desafios para a aprendizagem matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes que a matemática não é um conjunto de regras técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história” (BRASIL, 2017, p. 522).

A proposta de inserção da história no processo pedagógico existe desde o século XIX. Segundo Jankvist e Van Maanen (2009) e Karp e Gert Schubring, no livro *Handbook on the History of Mathematics Education* (KARP; SCHUBRING, 2014), observa-se que a história da matemática já estava presente em livros-textos do século XIX, na Alemanha. Desde 1984, o grupo History and Pedagogy of Mathematics (HPM) participa das atividades dos congressos organizados pela International Congress on Mathematical Education (ICME),

com relatos de investigações acerca de atividades de ensino que mobilizam, de alguma maneira, a história.

Além disso, vários pesquisadores têm investigado sobre essa inserção. Brito (2007), a partir de suas pesquisas acadêmicas e de sua prática como docente, afirma que a história da matemática pode colaborar com questões pedagógicas, como, por exemplo, na orientação de escolhas e decisões metodológicas e didáticas por parte dos professores; na análise de diferentes currículos, dos livros-textos e materiais didáticos em geral; no conhecimento de fundamentos dos conteúdos matemáticos básicos presentes na prática docente; na criação de projetos que articulam o conhecimento matemático às contribuições de outras áreas do conhecimento. Além disso, a autora, assim como a BNCC, indica que a história da matemática e a de seu ensino possibilitam aos estudantes perceber a diversidade cultural no que se refere à produção do conhecimento matemático, o que se contrapõe à ideia eurocêntrica tão disseminada no ensino de matemática, ou seja, que diferentes povos em diferentes regiões e épocas produziram e produzem matemática.

Balestri e Cyrino (2010), a partir de entrevistas com professores, destacam que a história da matemática poderia auxiliar na compreensão dos conteúdos matemáticos; contribuir para compreensão da matemática como área de conhecimento; colaborar na percepção de relações entre a matemática e outras áreas do conhecimento; veicular a matemática como uma construção humana; responder alguns “porquês” que surgem ao se construir o conhecimento matemático; abrir espaços para que o professor solicite aos seus alunos o desenvolvimento de atividades que exijam produções escritas; contribuir em discussões acerca das condições necessárias para o desenvolvimento da matemática; e provocar reflexões sobre possíveis encaminhamentos da prática pedagógica do futuro professor.

No sexto Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CREME), ocorrido em Lyon, 2009, Lawrence (2009) descreveu uma pesquisa realizada com o uso da história no ensino e concluiu que ela pode encorajar os estudantes a fazer conexões entre os diferentes campos da matemática, incrementar a motivação dos alunos a partir de problemas com contextos históricos e enriquecer sua compreensão matemática por meio da exploração histórica.

Conforme Matos (2020), a integração da história nas aulas de matemática colabora para que o professor ultrapasse

Uma visão que imagina a escola do passado como dos “bons velhos tempos” (ou a dos “maus velhos tempos”, conforme a perspectiva), como também compreender que muito do que se imagina inovador tem, na verdade, raízes profundas no passado (MATOS, 2020, p. 27).

No entanto, proporcionar condições de aprendizagem da matemática que esclareçam sua história encontra diversos desafios, entre eles o material didático sobre história da matemática disponível para o uso em sala de aula. Em artigo publicado por Moura e Brito (2019), consta que o uso da história da matemática ocorre, na maior parte das vezes, por intermédio do livro didático, “em que pequenos fatos históricos são contados no início e no fim de uma unidade, sem qualquer conexão com a construção dos conceitos” (MOURA; BRITO, 2019, p. 9). A conclusão dessas autoras vai ao encontro dos resultados de pesquisa de Dejić e Mihajlović (2014). Segundo esses autores, 80% dos docentes na Sérvia buscam inserir história em suas aulas de matemática e, desses, metade tem como fonte apenas livros didáticos. Assim, o ensino da matemática com o recurso à história da matemática carece de material para além dos livros didáticos.

O manual aqui publicado tem a finalidade didática de apresentar atividades práticas de conteúdos de cônicas, com uma abordagem pedagógica que utiliza a história da matemática. As atividades aqui expostas dirigem-se para salas de aula do ensino médio ou para formação de professores de matemática. As práticas apresentadas neste manual didático são fruto de atividades desenvolvidas e utilizadas pelas autoras em ambiente de aprendizagem do ensino médio e do ensino superior.

A prática 1, “Cortes transversais em três cones”<sup>1</sup>, relaciona as cônicas com cortes de três cones distintos. A planificação e o corte dos objetos permitem uma análise das figuras cônicas, de suas representações e de seus elementos.

---

<sup>1</sup> As atividades apresentadas nas práticas 1, 2 e 3 foram elaboradas por Arlete de Jesus Brito, autora desse manual, e apresentadas pela primeira vez em minicurso ministrado por ela e por Claudia Helena Dezotti na CIENTEC, UFRN, no ano de 2001. Parte dessas atividades foram posteriormente utilizadas na pesquisa de Macena (2007).

A prática 2, “Cortes transversais no mesmo cone”, relaciona as cônicas com cortes no mesmo cone. A atividade investiga, também, a relação do ângulo do corte com o ângulo do vértice.

A prática 3, “Cônicas e lugares geométricos”, aborda a construção das cônicas como lugares geométricos. Com o uso de um artefato para construção da elipse é possível construir os elementos da cônica e analisá-la como lugar geométrico.

A prática 4, “Cônicas e geometria analítica”, aborda as cônicas sob a perspectiva da geometria analítica. O uso do “parabológrafo” (adaptado para a sala de aula) para o traçado de parábola em situação do plano cartesiano permite compreender a parábola e sua equação na perspectiva da geometria analítica.

As práticas traçadas foram elaboradas de maneira a seguir a trajetória histórica das cônicas. A inserção dessas práticas no ensino de matemática, segundo Moura e Brito (2019, p. 609-625) ressaltam aspectos interdisciplinares do conhecimento, mobiliza interculturalidade, “conduz o aluno a refletir sobre como e o porquê de pessoas em outros momentos históricos e culturais terem produzidos e ensinado matemática”. Desejamos que o uso desse manual didático colabore para ampliar, com significado, os conhecimentos no ensino de matemática.

## Referências

BALESTRI, R. D.; CYRINO, M. C. C. T. A história da matemática na formação inicial de professores de matemática. Florianópolis, *Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*. v. 3, n. 1, p. 103-120, 2010.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM +)*. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Curricular Comum*. Brasília: MEC, 2017.

BRITO, A. J. A história da matemática e a da educação matemática na formação de professores. *Educação Matemática em Revista*, v. 22, n. 13, p. 11-15, 2007.

DEJIC, M.; MIHAJLOVIC, A. M. History of mathematics and teaching mathematics. *Teaching Innovations*, v. 27, n. 3, p. 15-30, 2014.

JANKVIST, U. T.; VAN MAANEN, J. History and mathematics education. *CERME 6*, Lyon, France, 2009.

KARP, A.; SCHUBRING, G. *Handbook on the History of Mathematics Education*. Nova York: Springer, 2014.

LAWRENCE, S. What works in the classroom project on the history of mathematics and the collaborative teaching practice. *CERME 6*, Lyon, France, 2009. Disponível em: <http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg15-08-lawrence.pdf>. Acesso em: 28 set. 2018.

MACENA, M. M. M. *Contribuições da investigação em sala de aula para a aprendizagem das seções cônicas com significado*. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – CCET, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2007.

MATOS, J. M. Apresentação. In: SILVA, M. C. L.; PINTO, T. P. *História da educação matemática e formação de professores: aproximações possíveis*. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

MOURA, E. C. M.; BRITO, A. J. History of mathematics in didactic sequences in teacher's initial formation. *Revista Educação Teoria e Prática*, Rio Claro, v. 29, n. 62, p. 609-625, 2019.

## PRÁTICA 1 – Cortes transversais em três cones

### Preparação para a prática:

- Para essa prática, você precisará recordar a classificação dos ângulos, saber o que é um cone, retas perpendiculares entre si e altura; e conhecer as simetrias central, de translação e a axial (ou simetria por espelhamento). Também precisará saber os princípios de manipulação algébrica com variáveis.

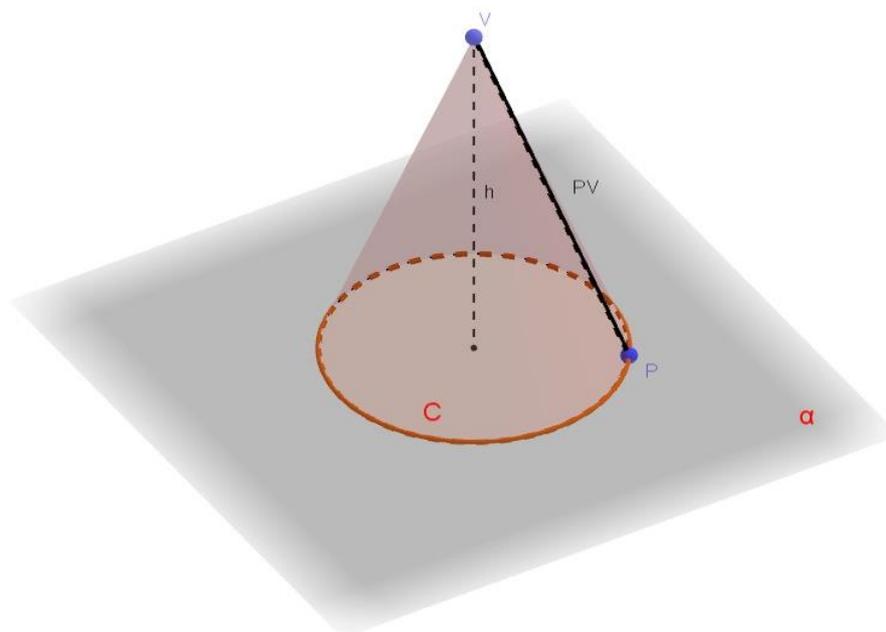
### Objetivos:

- Conhecer os elementos de um cone.
- Relacionar as cônicas com cortes de diferentes cones.
- Diferenciar as cônicas entre si.
- Conhecer a história de estudos sobre as cônicas conduzidos por sábios da Antiguidade grega.
- Analisar, com o uso da linguagem atual, a demonstração da fórmula da parábola obtida por Menaecmus.

### 1. Fundamentação teórica

Para iniciarmos as atividades, apresentaremos uma primeira definição de cone muito próxima daquela estudada no ensino fundamental. Posteriormente, ela será ampliada neste texto. Assim, nesta primeira prática, definiremos superfície cônica da seguinte maneira:

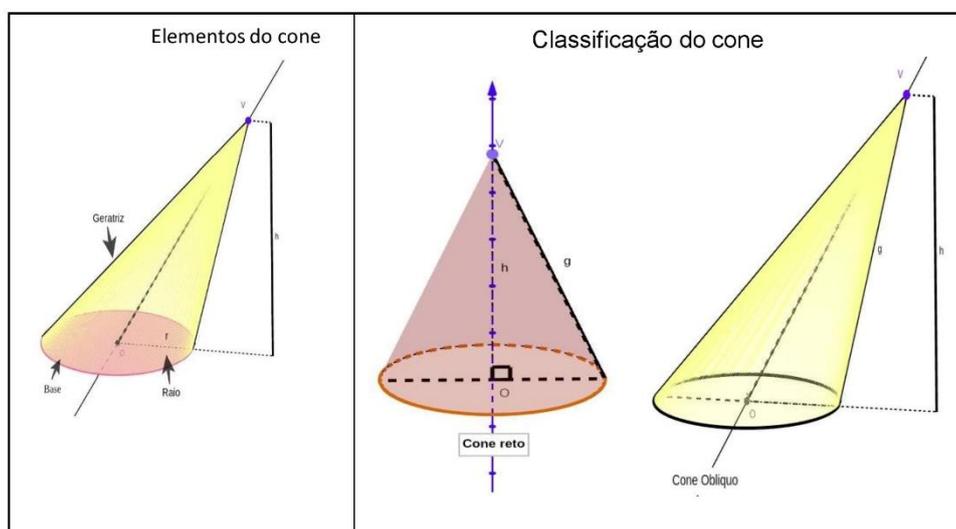
Seja  $C$  um círculo em um plano  $\alpha$  e  $V$  um ponto não pertencente a esse plano. Para cada ponto  $P$  na circunferência de  $C$ , existe um segmento  $\overline{PV}$ . A reunião de todos esses segmentos chama-se superfície cônica de base  $C$  e vértice  $V$ . A distância  $h$  de  $V$  a  $\alpha$  chama-se altura do cone e cada um dos segmentos  $\overline{PV}$  é uma geratriz do cone.

**Figura 1 – Superfície cônica**

Fonte: André M. dos Santos (2021).

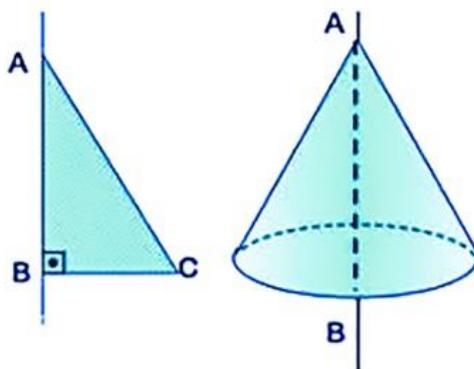
Além desses elementos, utilizaremos neste texto a medida da projeção, em um plano paralelo à altura do cone, do ângulo sólido formado no vértice. Iremos nos referir a ela apenas como medida da projeção do ângulo sólido.

Os cones circulares são classificados em retos ou oblíquos. Se o centro do círculo C coincidir com a interseção da perpendicular de V a  $\alpha$ , o cone será denominado de cone circular reto. Caso contrário, será um cone circular oblíquo, conforme observamos na figura a seguir (figura 2):

**Figura 2 – Elementos do cone**

Fonte: André M. dos Santos (2021).

Os cones retos podem ser obtidos por meio da revolução de uma reta  $\overline{AC}$  ao redor de um eixo  $\overline{AB}$ . O ângulo  $\widehat{CAB}$  é denominado de ângulo gerador do cone, conforme figura a seguir (figura 3):

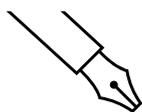
**Figura 3 – Cone de revolução**

Fonte: As autoras (2019).

Na Grécia da Antiguidade, as cônicas já eram conhecidas. Naquela sociedade, as curvas eram determinadas ou pela combinação de movimentos uniformes ou pela interseção de superfícies geométricas. Menaecmus (c. 350 a.C.), ao estudar a interseção entre cones circulares retos e planos perpendiculares às suas geratrizes, chegou à essa família de curvas que denominamos por “cônicas”, ou seja, ele observou que os cortes determinavam parábolas, hipérbolas e elipses (BOYER, 1974).

## 2. Procedimento experimental

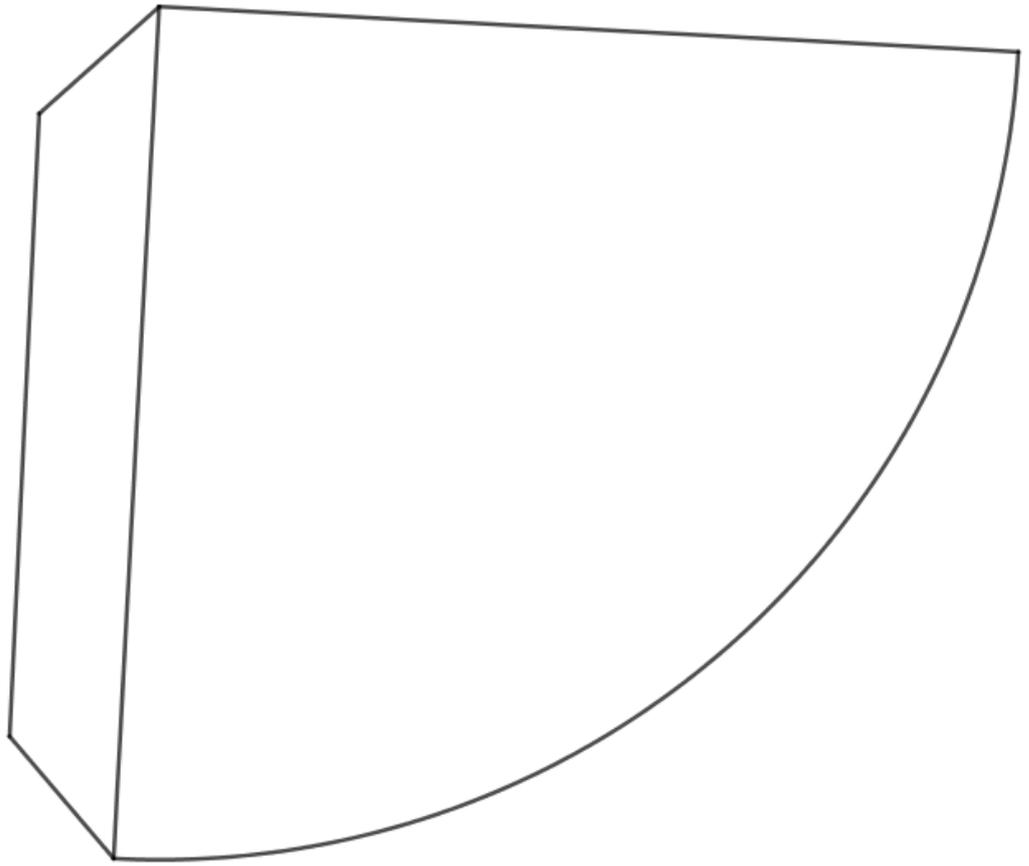
Consiste na montagem de três cones planificados para a realização de cortes transversais, com o objetivo de relacionar as cônicas com os cortes de três cones distintos. A planificação e o corte dos objetos permitem uma análise das figuras cônicas, de suas representações e de seus elementos.

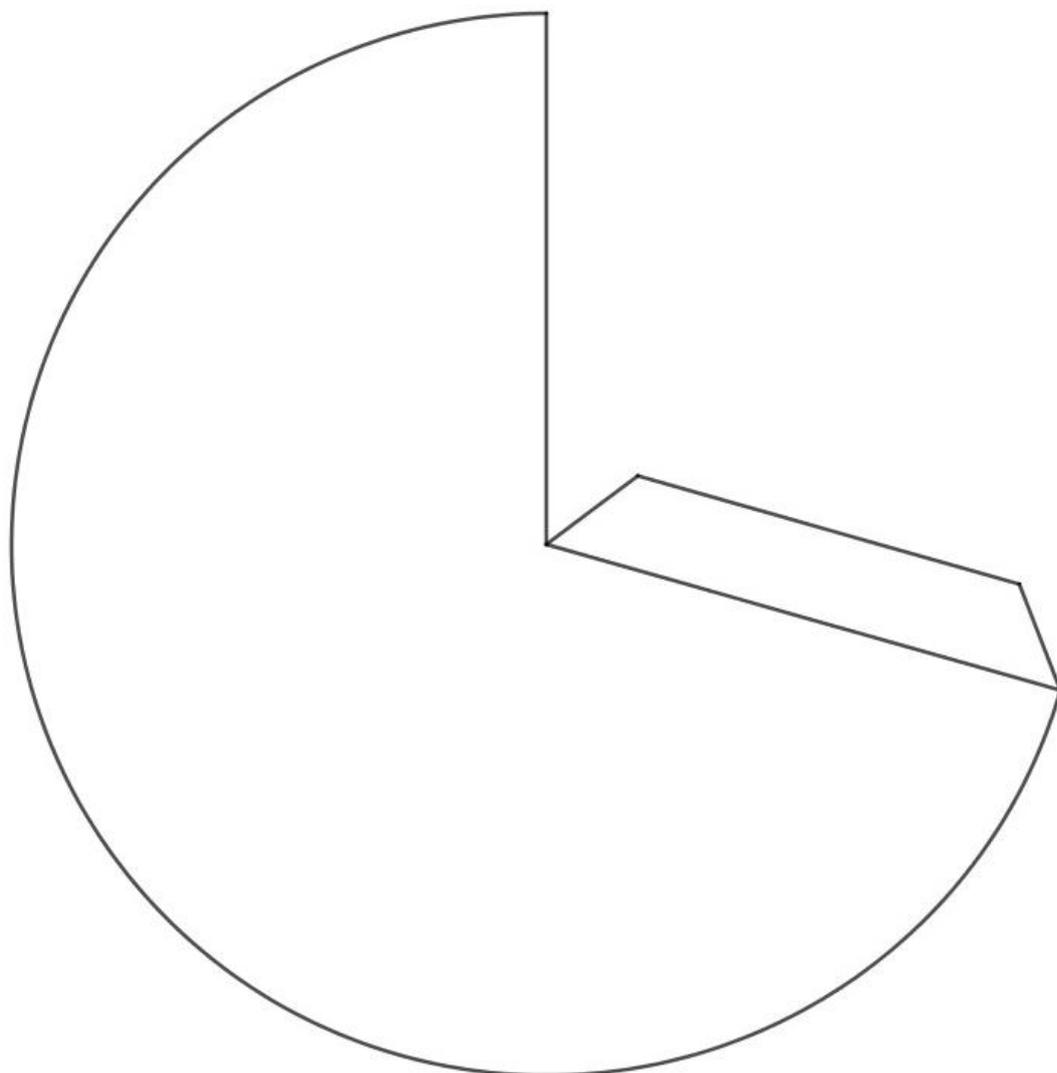


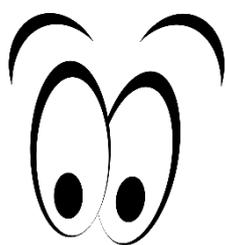
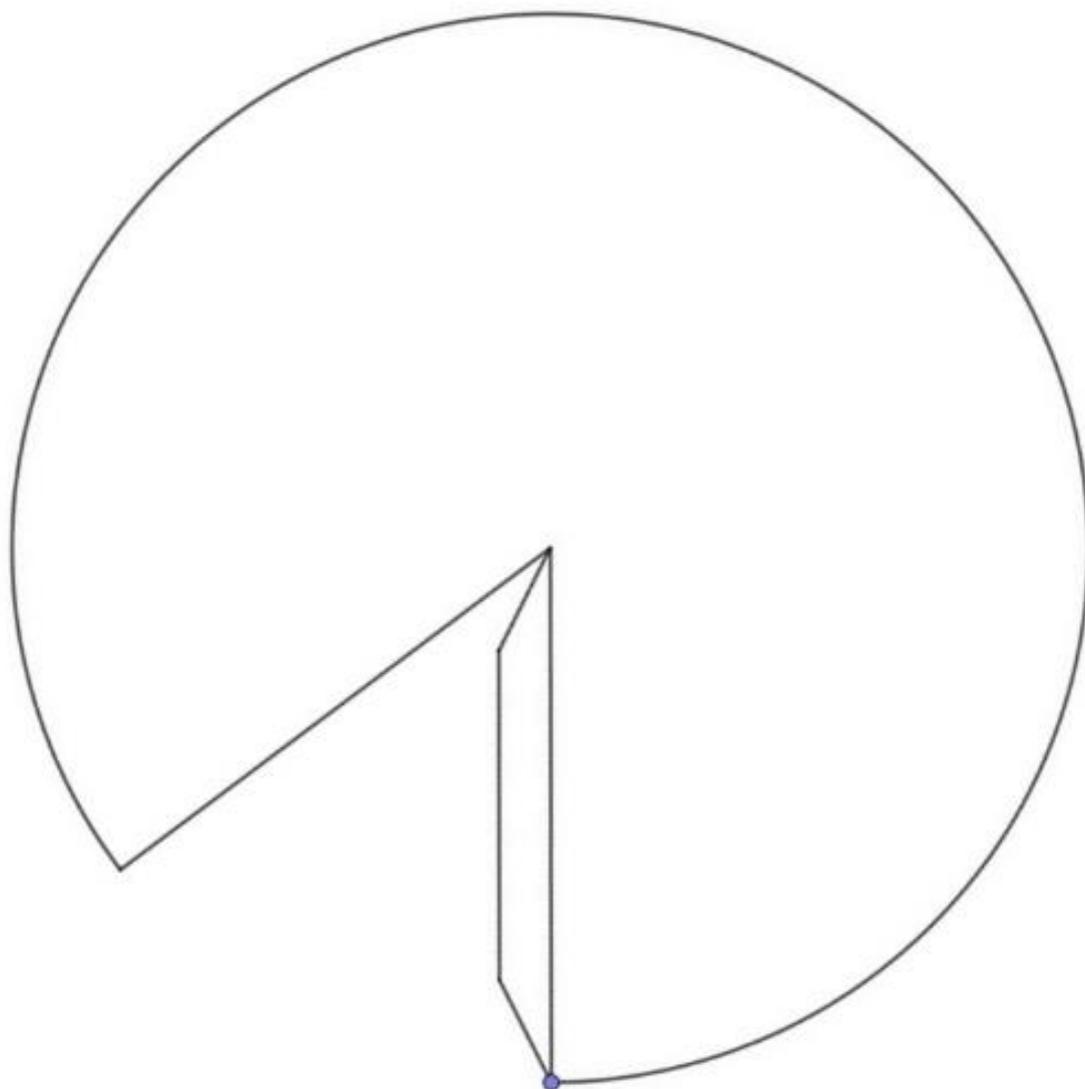
Recomenda-se ao estudante registrar o processo de desenvolvimento das atividades: suas tentativas, questionamentos, desafios encontrados, resultado parcial e resultado final. O/a professor/a pode solicitar uma discussão dos registros entre os alunos ou grupo de alunos.

### 2.1 Materiais

Para fazer as atividades, você precisará transferir, para uma folha de sulfite, as planificações dos cones que estão a seguir, recortá-los e colá-los. Portanto, precisará também de tesoura e de cola.







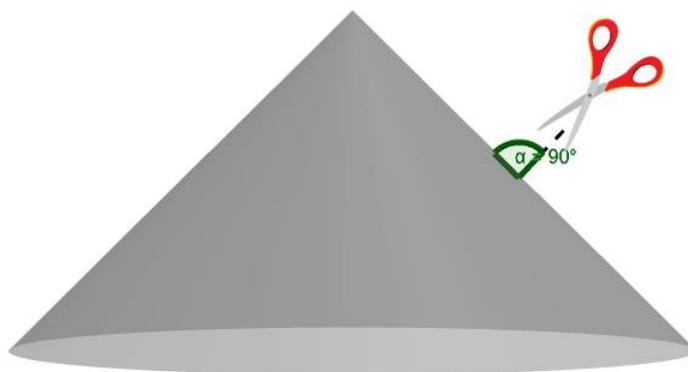
Observe que as planificações estão sem as respectivas bases e não é por acaso. Nas análises que você fará a partir de tais cones, apesar de estar lidando com um material limitado, considere que, idealmente, as geratrizes podem ser infinitamente estendidas.

## 2.2. Metodologia

Monte os cones cujas planificações estão na seção anterior deste manual. Compare-os. Em que são semelhantes e em que são distintos (no que se refere à altura de cada um, medida da geratriz, medida do ângulo central do cone planificado, medida da projeção do ângulo sólido)?

Em cada um dos cones já montados faça um corte por um plano perpendicular à geratriz (conforme o esquema da figura 4).

**Figura 4** – Corte perpendicular à geratriz



Fonte: André M. dos Santos (2021).

## 3. Atividades

- 1) Estudo dos cortes em cones diferentes:
  - a) Quais curvas se formam a partir dos cortes em cada um dos cones?
  - b) Qual elemento do cone você acha que determina que, em cada um deles, se forme uma curva diferente das demais?
  - c) Vamos testar sua hipótese. Planifique e monte três cones de modo que o único elemento que varie neles seja aquele que você acredita ser o determinante para que os cortes resultem em curvas diferentes. Por exemplo, se você acredita que

tal elemento seja a geratriz, planeje e monte três cones em que cada um tenha a medida de geratriz diferente dos demais, mas que todos tenham a mesma medida da projeção do ângulo sólido e altura.

- d) Faça os cortes perpendiculares à geratriz de cada um dos cones. Sua hipótese se confirmou?



Observação: Se você tiver acesso ao *software* Geogebra, pode construir, de maneira dinâmica, os cones conforme especificados no item *c* desta atividade e testar nele sua hipótese.



**FIQUE SABENDO!** O GeoGebra é um *software* livre, criado em 2001 como tese de doutorado de Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburgo, Áustria. Ele criou e desenvolveu esse *software* com o objetivo de obter um instrumento adequado ao ensino da matemática, combinando procedimentos geométricos e algébricos, ou seja, o nome GeoGebra é a fusão das palavras geometria e álgebra.

Disponível em vários idiomas, podemos encontrá-lo para *download* em <http://www.geogebra.org> (site oficial), Play Store, Apple Store, entre outras lojas de aplicativos, em versões para Windows, Mac, Linux, Android e IOS. É, portanto, um *software* de matemática dinâmico e multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Por ser livre (*software* que concede a liberdade ao usuário para executar, acessar, copiar, estudar e modificar o código-fonte, e redistribuir essas versões, sejam elas modificadas ou não), vem ao encontro das novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar e investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático.

No GeoGebra, gráficos, álgebra e tabelas estão interligados. Além de possuir características dinâmicas, é dotado de uma interface amigável, com vários recursos sofisticados. Podemos utilizar o *software* como ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB e como laboratórios virtuais de matemática, física ou química. Em seu *site* oficial, além do aplicativo, podemos compartilhar nossos materiais e acessar outros, de diferentes usuários (distribuídos por área ou mesmo pelo do perfil do autor), ter acesso a tutoriais e às últimas notícias da comunidade GeoGebra e criar aulas, livros e outros materiais (Instituto São Paulo Geogebra, <https://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>).

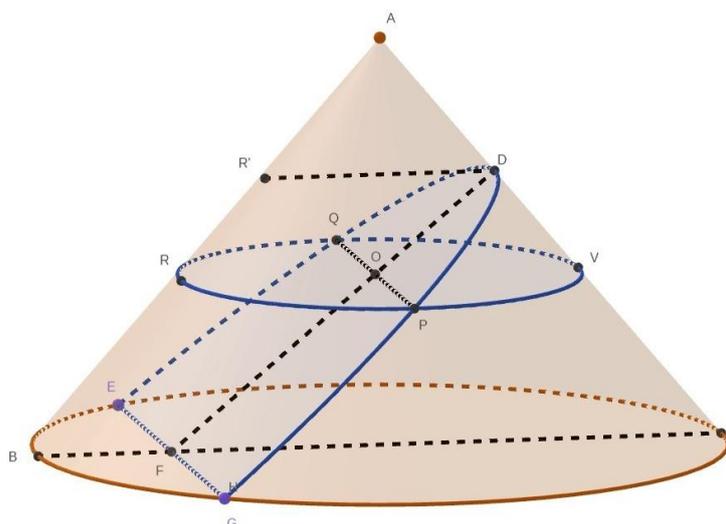
- 2) Em seus estudos, Menaecmus (350 a.C.) concluiu que, em um cone circular reto, cuja projeção do ângulo sólido é 90 graus, o corte perpendicular à geratriz resulta em uma parábola. De modo semelhante, descobriu que a seção transversal em um cone cuja projeção do ângulo sólido é um ângulo agudo é uma elipse e, se for um ângulo obtuso, a curva será uma hipérbole.

Em seu livro *História da Matemática*, Boyer (1974) apresenta uma suposta demonstração da fórmula da parábola realizada por Menaecmus em linguagem de geometria analítica atual. Tal fórmula é  $y^2 = kx$ , em que  $k$  é uma constante que depende da distância do plano de corte ao vértice. Vamos adaptar essa demonstração às nossas finalidades pedagógicas e analisá-la. Porém, para tal, precisaremos lembrar alguns teoremas da geometria euclidiana plana:

- O centro, o ponto médio da corda e os pontos médios dos dois arcos subtendidos pela corda estão em uma mesma reta, que é perpendicular à corda.
- Dados uma circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ , P um ponto pertencente à circunferência,  $\overline{PT}$  o segmento perpendicular a  $\overline{AB}$  em T. Então,  $\overline{PT}$  é a média geométrica entre  $\overline{AT}$  e  $\overline{TB}$ , ou seja,  $\overline{PT}^2 = \overline{AT} \cdot \overline{TB}$
- Em triângulos semelhantes, as razões entre as medidas dos lados homólogos são iguais.
- Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

Observe a demonstração a seguir, que tem por base a figura 5, e justifique as passagens marcadas com (\*)

**Figura 5** – Corte transversal do cone



Fonte: André M. dos Santos (2021).

Seja  $ABC$  um cone cortado pela curva  $EDG$  por um plano perpendicular a  $AC$  e paralelo ao lado  $AB$  do triângulo retângulo  $BAC$ . Por um ponto  $P$  qualquer da curva (parábola) faremos passar um plano paralelo à base  $BGE$  do cone que o cortará segundo o círculo  $PVR$ , de modo que  $Q$  é o outro ponto de interseção da curva  $EDG$  com o círculo  $PVR$ .

P e Q são simétricos em relação à O (\*)

Construímos o diâmetro  $\overline{RV}$  do círculo PVR, passando pelo ponto médio O. Assim,  $\overline{PQ}$  é perpendicular a  $\overline{RV}$  (\*)

Os triângulos OVD e ABC são semelhantes. (\*)

Assim, temos:

$$\frac{OV}{OD} = \frac{BC}{AB}$$

$$OV = \frac{BC}{AB} \cdot OD$$

Passando por D, constrói-se um segmento  $\overline{R'D}$  paralelo à base BGE do cone. Da semelhança dos triângulos R'DA e ABC (\*), temos

$$\frac{R'D}{AR'} = \frac{BC}{AB}$$

$$R'D = \frac{BC}{AB} \cdot AR'$$

Imaginemos um sistema de coordenadas composto pela reta  $\overline{DF}$  e pela perpendicular a ela no ponto D, paralela a  $\overline{PQ}$ . Consideraremos a medida de  $\overline{OP} = y$  e a de  $\overline{OD} = x$ , coordenadas do ponto P.

$$y^2 = RO \cdot OV (*)$$

Pelo modo de construção, R'DOR formam um paralelogramo.

Portanto, podemos substituir a medida de  $\overline{RO}$  pela de  $\overline{R'D}$  (\*)

$$y^2 = R'D \cdot OV$$

$$y^2 = \frac{BC}{AB} \cdot AR' \cdot \frac{BC}{AB} \cdot OD$$

$$y^2 = \frac{BC}{AB} \cdot AR' \cdot \frac{BC}{AB} \cdot x$$

Como as medidas  $AR'$ ,  $BC$  e  $AB$  são as mesmas para todo ponto  $P$  da curva  $EQDPG$ , podemos escrever a equação da curva como  $y^2 = k.x$ .

## BNCC

A proposta do conjunto de ações organizadas nas atividades de “Prática 1 – Cortes transversais em três cones” consiste em ler, recortar, colar, resolver problemas, compreender demonstrações e mobilizar procedimentos que permitam elaborar estratégias de observações, investigações, análises, questionamentos e registros do processo e dos resultados obtidos. Essas ações podem, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmicos. Dessa maneira, tal proposta possibilita que os/as estudantes desenvolvam habilidades relativas aos processos de investigação, de construção, de modelos e de resolução de problemas, em uma dinâmica que mobilize seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

As atividades de Prática 1 compreendem as seguintes competências específicas e suas habilidades específicas da BNCC:

**Competências 3:** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – aritmética, álgebra, grandezas e medidas, geometria –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

**Habilidade (EM13MAT308):** Resolver e elaborar problemas em variados contextos envolvendo triângulos, nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

**Competência 5:** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

**Habilidade (EM13MAT509):** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.

## PRÁTICA 2 – Cortes transversais no mesmo cone

### Preparação para a prática:

- Para esta prática, você precisará saber o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo, saber o que são retas paralelas entre si e recordar as etapas de uma demonstração algébrica.

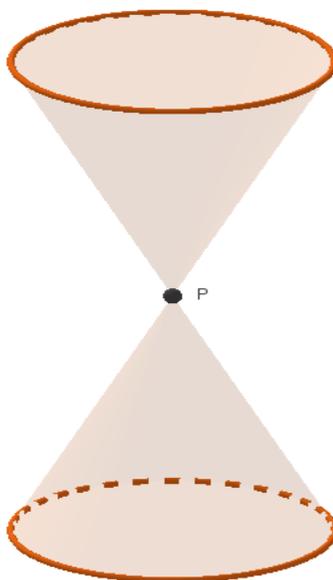
### Objetivos:

- Ampliar o conceito de cone.
- Generalizar o conceito de cônicas a partir de cortes do cone.
- Relacionar as cônicas entre si.
- Ampliar o conhecimento sobre a história de estudos sobre as cônicas conduzidos por sábios da Antiguidade grega.

### 1. Fundamentação teórica

Após os resultados de Menaecmus sobre as cônicas, Apolônio de Perga (262 a.C.-190 a.C.) chegou a novos conceitos e generalizações sobre tais curvas. Apolônio substituiu, em seus estudos, o cone de uma folha por um cone duplo, o que o levou à definição de cone utilizada até os dias atuais (figura 6): se uma reta de comprimento indefinido, que passa por um ponto fixo P, mover-se ao longo de uma circunferência de um círculo que não está no mesmo plano que P, de modo a passar sucessivamente por cada m dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo.

**Figura 6** – Cone duplo

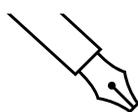


Fonte: André M. dos Santos (2021).

Deve-se a Apolônio também os nomes dados às cônicas. Anteriormente, elas eram designadas pelos modos que haviam sido descobertas, ou seja, “oxytome”, que significa seção do cone acutângulo, “orthotome”, que é seção do cone retângulo, e “amblytome”, seção do cone obtusângulo. A denominação “parábola” já havia sido utilizada por Arquimedes de Siracusa (séc. III a.C.), mas Apolônio introduziu as denominações “elipse” e “hipérbole” para as cônicas. No entanto, tais termos já eram usados pelos pitagóricos em problemas de áreas que conduziam ao que hoje denominamos por equações quadráticas (BOYER, 1974).

## 2. Procedimento experimental

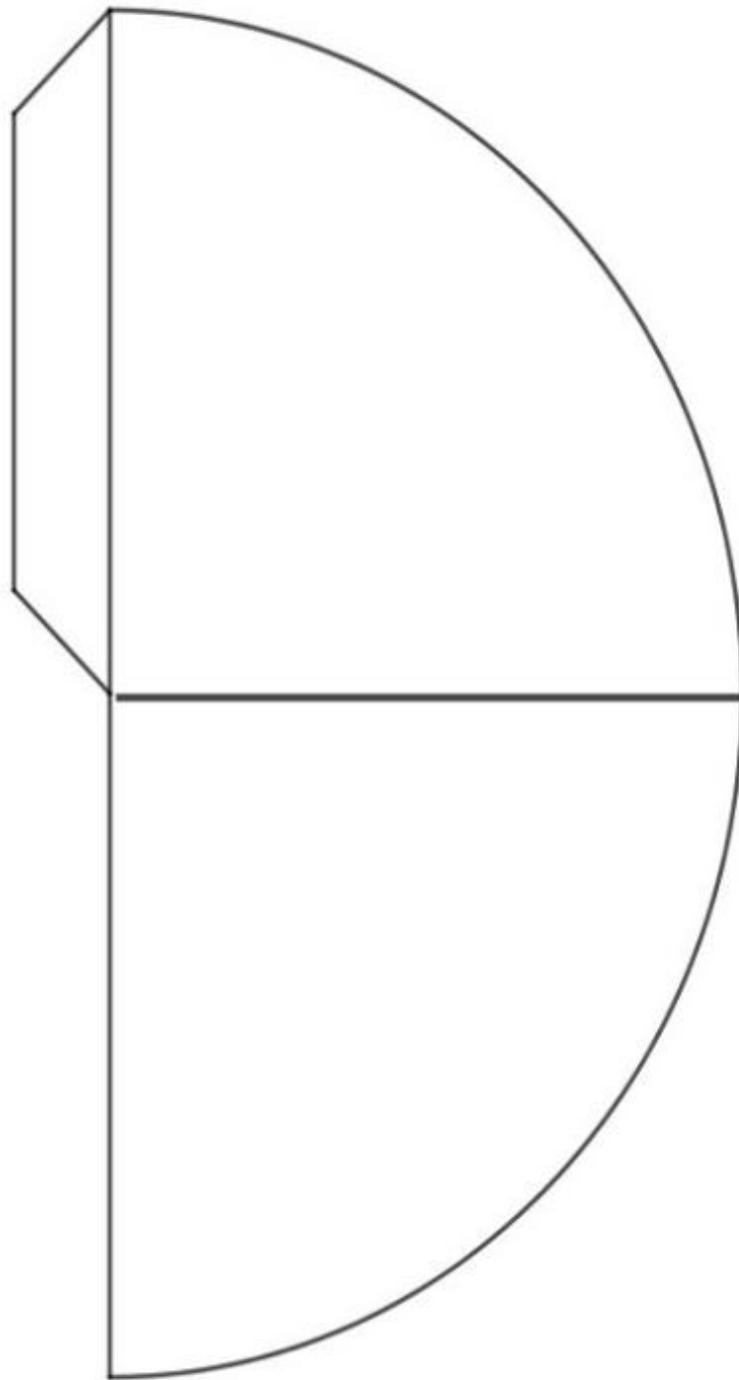
Consiste na montagem de cones duplos para a realização de cortes transversais no mesmo cone, com o objetivo de relacionar as cônicas aos cortes desse mesmo cone. A atividade investiga, também, a relação do ângulo do corte com o ângulo do vértice.

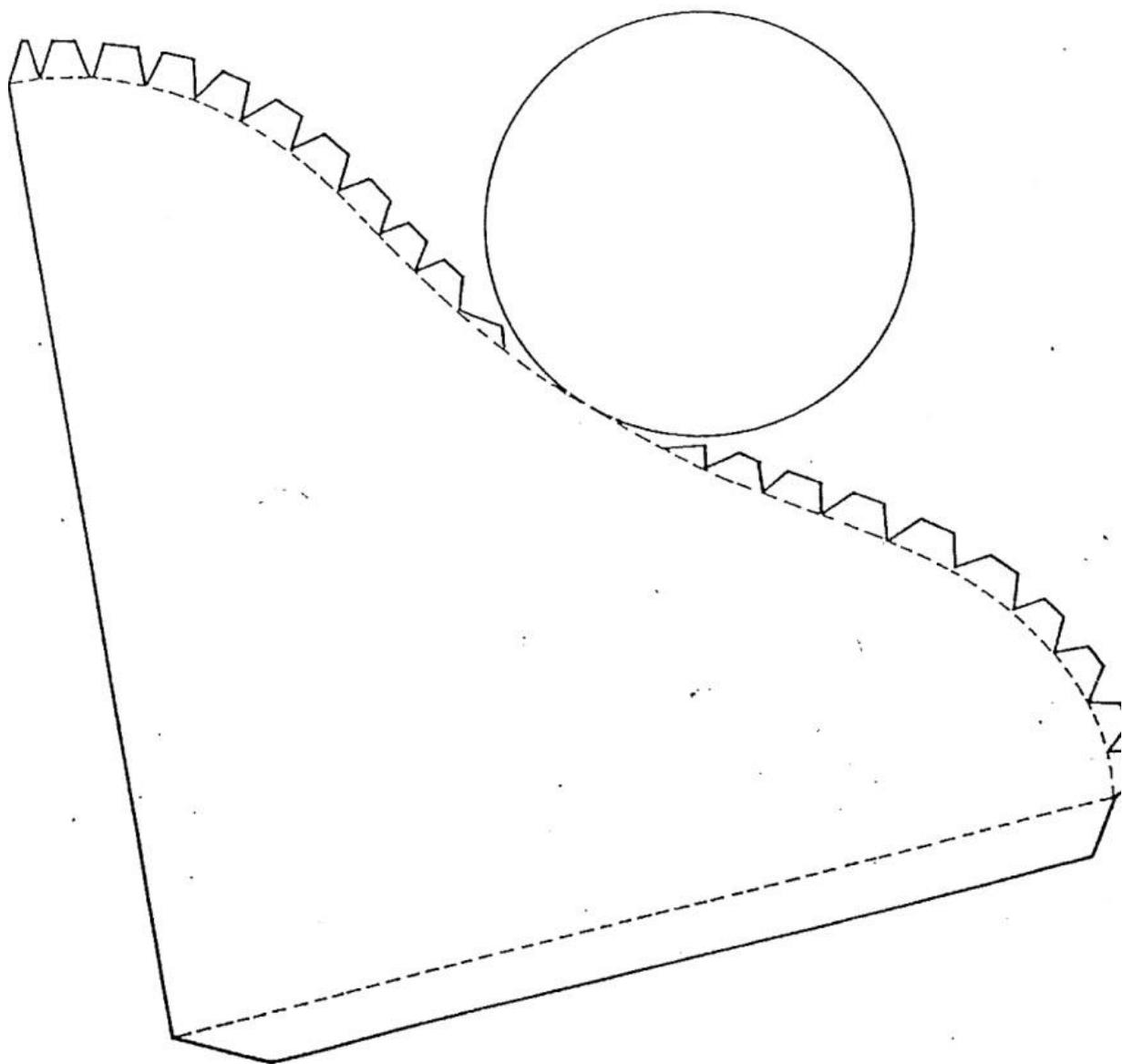


Recomenda-se ao estudante registrar o processo de desenvolvimento das atividades: suas tentativas, questionamentos, desafios encontrados, resultado parcial e resultado final. O/a professor/professora pode solicitar uma discussão dos registros entre os alunos ou grupo de alunos.

### 2.1 Materiais

Para as atividades, você precisará transferir, para uma folha de sulfite, duas cópias de cada uma das planificações dos cones que estão a seguir, para analisar as situações de corte em cones duplos. Depois, é necessário recortá-los e colá-los. Portanto, precisará também de tesoura e de cola. Caso prefira, você mesmo poderá criar seus cones.





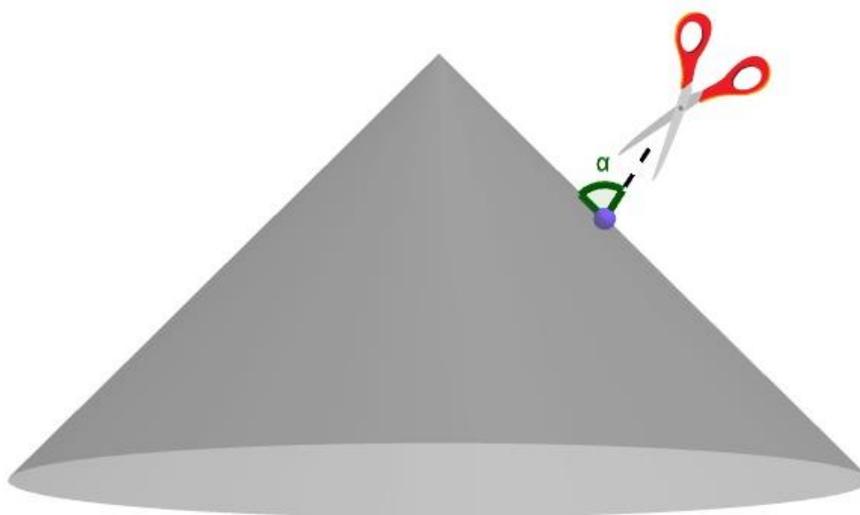
## 2.2 Metodologia

Monte os cones cujas planificações estão na seção anterior deste livro. Observe-os e os classifique-os em reto ou oblíquo.

### 3. Atividades

- 1) É possível, a partir de diferentes cortes no cone reto, produzir uma elipse, uma hipérbole e uma parábola? Em caso negativo, por quê? Em caso positivo, como seriam esses cortes?
- 2) Qual a relação entre a medida da projeção do ângulo sólido e a do ângulo de corte ( $\alpha$ ) para a obtenção da parábola em qualquer cone? Considere que o ângulo de corte é o marcado na figura a seguir (figura 7):

**Figura 7** – Ângulo de corte



Fonte: André M. dos Santos (2021).

- 3) Qual deverá ser a relação entre a medida da projeção do ângulo sólido e a do ângulo de corte para a obtenção da hipérbole e a elipse, em qualquer cone?
- 4) Como você sabe, é possível obter um círculo a partir de um corte paralelo à base do cone. Qual a relação entre o ângulo  $\alpha$  de corte e o ângulo gerador do cone?
- 5) Verifique se as conclusões que você chegou nas atividades anteriores são também válidas para o cone oblíquo.



DICA: Se você tiver acesso ao software Geogebra, pode construir, de maneira dinâmica, os cones reto e oblíquo e realizar as atividades anteriores com o auxílio do *software*.

**BNCC**

A proposta do conjunto de ações organizadas nas atividades de “Prática 2 – cortes transversais no mesmo cone” consiste em ler, recortar, colar, resolver problemas e mobilizar procedimentos que permitam elaborar estratégias de observações, investigações, análises, questionamentos e registros do processo e dos resultados obtidos. Essas ações podem, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmico. Dessa maneira, tal proposta possibilita que os/as estudantes desenvolvam habilidades relativas aos processos de investigação, de construção, de modelos e de resolução de problemas, em uma dinâmica que mobilize seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

As atividades de Prática 2 compreende a seguinte competência específica e sua habilidade específica:

**Competência 5:** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas

**Habilidade (EM13MAT509):** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.

## PRÁTICA 3 – Cônicas e lugares geométricos

### Preparação para a prática:

- Para esta prática, você precisará saber determinar geométrica e algebricamente a distância entre dois pontos e a distância entre um ponto e uma reta; saber traçar plano cartesiano e localizar pontos nesse plano; saber deduzir equações algébricas.

### Objetivos:

- Definir cônicas como lugares geométricos.
- Estudar equações de cônicas a partir de suas propriedades como lugares geométricos.
- Definir excentricidade de uma cônica.
- Diferenciar excentricidade de parábola, hipérbole e elipse.
- Ampliar os conhecimentos históricos sobre as cônicas.

### 1. Fundamentação teórica

Lugar geométrico é o conjunto de pontos que possuem uma determinada propriedade. Por exemplo, a circunferência é um lugar geométrico em que todos os pontos equidistam de um mesmo ponto (centro). A mediatriz de um segmento também é um lugar geométrico, pois todos os seus pontos equidistam dos extremos do segmento. Os gregos da Antiguidade dividiam as curvas em três categorias de lugares geométricos: os lugares planos, que eram as retas e os círculos; os lugares sólidos, formados pelas seções cônicas; e os lugares lineares, compostos por todas as outras curvas.

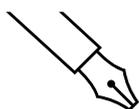
Apolônio, apesar de ter iniciado seus estudos sobre as cônicas com cortes do cone, percebeu que cada uma delas poderia ser definida por um conjunto de pontos que possuíam determinada propriedade. A partir disso, continuou seus trabalhos sobre cônicas considerando-as curvas no plano e, a partir disso, deduziu várias propriedades dessas curvas.

Pappus de Alexandria (c. 320 d.C.) é conhecido por seus oito livros que compõem sua obra *Coleção*, a qual nos deixa entrever um pouco da matemática grega da Antiguidade. O livro VII dessa obra, além de se aproximar de equações usadas para descrever lugares geométricos, também enuncia as propriedades de foco-diretriz da elipse, hipérbole e parábola. No entanto, vale ressaltar que, na época, a álgebra ainda não havia sido inventada. Portanto, Pappus, em seus trabalhos, utilizou uma linguagem retórica para descrever tais lugares geométricos (BOYER, 1974).

Entre finais da Antiguidade e inícios da Idade Média foram inventados métodos mecânicos para a obtenção de algumas das cônicas. Artemio de Trales (c. 474-534), um dos arquitetos da Basílica de Santa Sofia, em Constantinopla, atual Istambul, em sua obra *Sobre Espelhos que Queimam*, descreve a construção da elipse a partir de dois focos e um barbante e também propriedades focais da parábola. Isidoro de Mileto (séc. VI), também arquiteto daquela basílica, provavelmente foi o inventor da construção mecânica da parábola a partir de uma régua T e de um barbante (ROONEY, 2012).

## 2. Procedimento experimental

Consiste na construção de um objeto articulado para o traçado de cônicas, com o objetivo de abordar como uso de um artefato para construção da elipse é possível construir os elementos da cônica e analisá-la como lugar geométrico.



Recomenda-se ao estudante registrar o processo de desenvolvimento das atividades: suas tentativas, questionamentos, desafios encontrados, resultado parcial e resultado final. O/a professor/professora pode solicitar uma discussão dos registros entre os alunos ou grupo de alunos.

### 2.1 Materiais

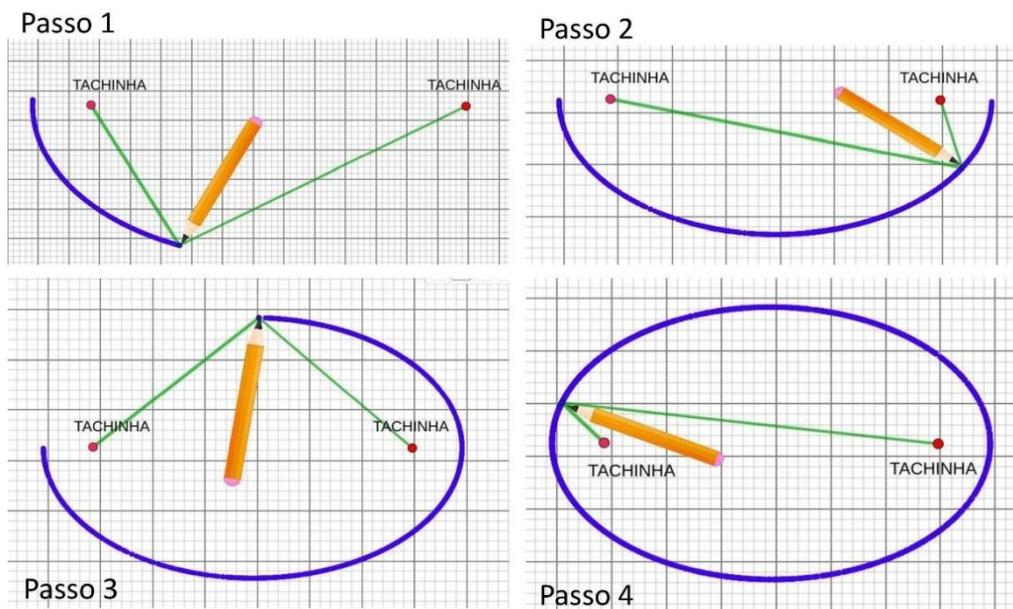
Para as próximas atividades, você precisará de folhas de papel milimetrado ou, ao menos quadriculado; régua; barbante; uma placa pequena de isopor medindo, aproximadamente, 20 cm de lado ou outro material em que você possa fixar duas tachinhas; duas tachinhas; e caneta.

### 2.2. Metodologia

#### Traçando a elipse

Perto do centro da placa de isopor, fixe as duas tachinhas com uma distância aproximada de 4 cm uma da outra. Em cada uma delas, amarre a ponta de um pedaço de barbante de 12 cm. Com uma caneta, estique bem o barbante e trace a curva ao redor dos pontos fixos, conforme o passo a passo da figura 8.

**Figura 8** – Passo a passo do traçado da elipse



Fonte: André M. dos Santos (2021).



**Observação:** Caso queira ver o funcionamento deste processo, há diversos vídeos disponíveis na internet. Basta buscar com as palavras-chave: traçado, elipse, barbante.

### DICAS!

Link de um vídeo para visualizar o traçado da elipse:

<https://youtu.be/RYY-uBWdb8Y>

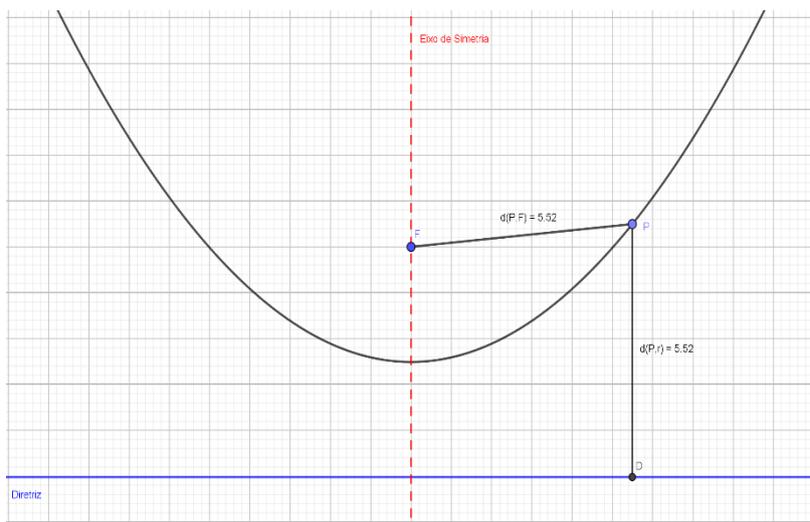
Link de um vídeo para visualizar o traçado da elipse, parábola e hipérbole:

[https://youtu.be/mldZ\\_7QwLvs](https://youtu.be/mldZ_7QwLvs)

### 3. Atividades

- 1) Observe o procedimento usado para traçar a elipse com o barbante. Nesse procedimento, há uma propriedade implícita que faz com que o traçado gere um lugar geométrico. Que propriedade é essa?
- 2) No papel milimetrado, marque uma reta  $r$  e um ponto  $F$  fora dela. Denominaremos essa reta de diretriz e o ponto de foco. Trace, nesse papel, o conjunto de pontos equidistantes da diretriz e do foco.
  - a) Que curva você obteve?
  - b) Há um eixo de simetria nessa curva. Que pontos notáveis da curva pertencem a esse eixo?
  - c) Qual a propriedade que define esse conjunto de pontos como um lugar geométrico?

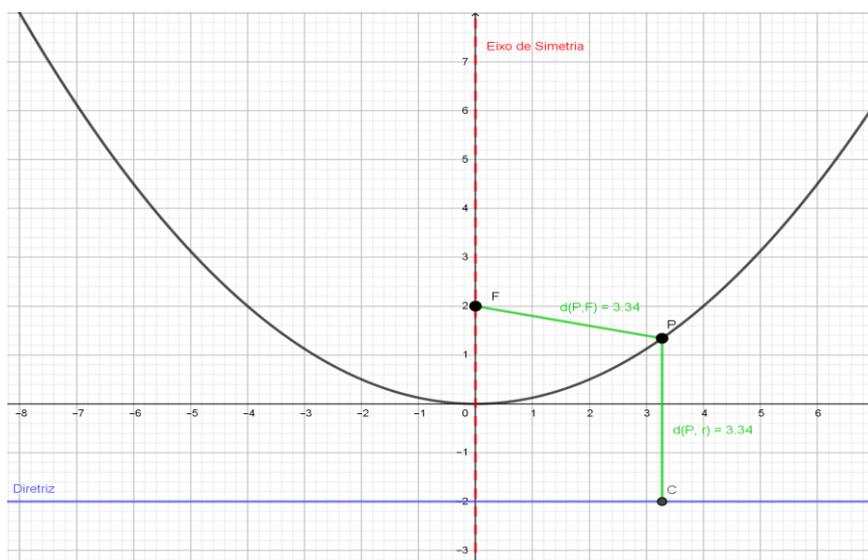
**Figura 9 – Parábola e seus elementos**



Fonte: André M. dos Santos (2020).

- 3) Na atividade anterior, coloque os eixos  $Ox$  e  $Oy$  de um plano cartesiano no papel milimetrado, de modo que o eixo  $Ox$  seja paralelo à diretriz e passe pelo vértice da curva. O eixo  $Oy$  deve coincidir com o eixo de simetria da curva. Considere que a equação da diretriz é  $y = -d$ . Dado um ponto  $P(x, y)$ , pertencente à curva:
- Determine a expressão algébrica da distância entre  $P$  e o foco.
  - Determine a expressão algébrica da distância entre  $P$  e a diretriz.
  - Utilizando a propriedade encontrada no item c da atividade 2, deduza uma expressão algébrica para esse conjunto de pontos, ou seja, para essa curva.

**Figura 10** – Parábola e seus elementos

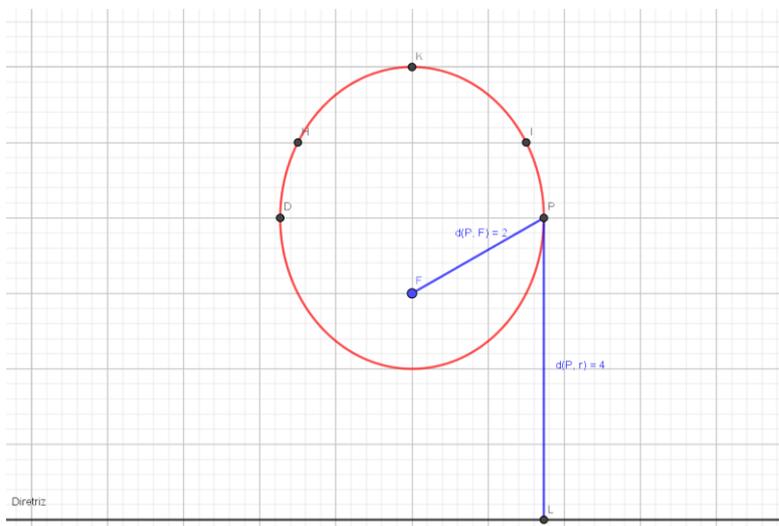


Fonte: André M. dos Santos (2020).

- 4) Em um papel milimetrado, marque uma reta  $r$ , que será a diretriz da curva, e um ponto  $F$  (foco). Determine o conjunto de pontos  $P$  de modo que  $d_{PF} = \frac{1}{2} d_{Pr}$ .
- Que curva você obteve?
  - Qual a propriedade que define esse conjunto de pontos como um lugar geométrico?
  - A constante  $\frac{1}{2}$  é chamada de excentricidade da curva e é simbolizada pela letra  $e$ . A excentricidade é definida pela razão  $\frac{d_{PF}}{d_{Pr}}$  e é um número real. No caso dessa curva, é tal que  $0 < e < 1$ . A partir disso e da propriedade do item b desta

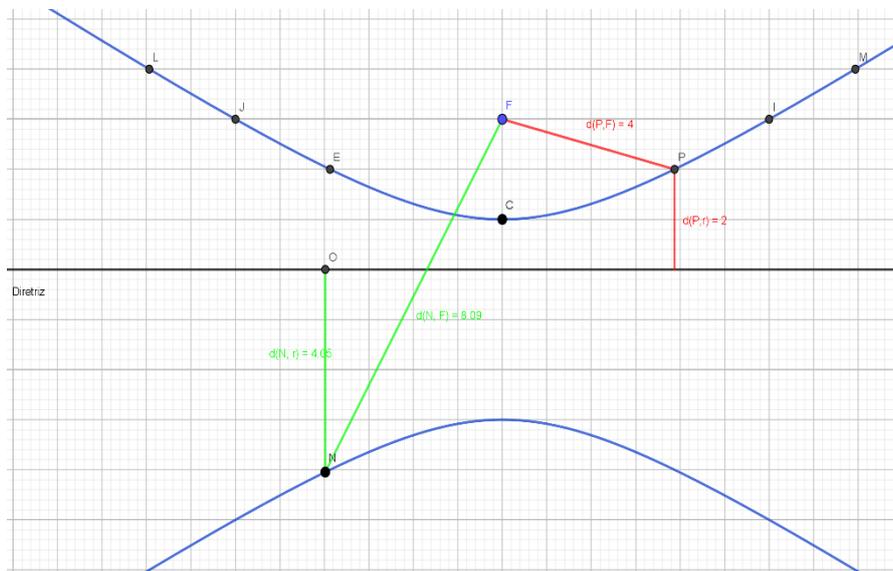
atividade, elabore uma definição para a curva que você encontrou como um lugar geométrico.

**Figura 11** – Elipse e seus elementos



Fonte: André M. dos Santos (2020).

- 5) Em um papel milimetrado, marque uma reta  $r$ , que será a diretriz da curva, e um ponto  $F$  (foco). Determine o conjunto de pontos  $P$  de modo que  $dPF = 2dPr$ .
- Que curva você obteve?
  - Qual a propriedade que define essa curva como um lugar geométrico?
  - Na situação dessa curva traçada por você, a excentricidade é 2. No caso dessa cônica específica, é um número real, tal que  $e > 1$ . A partir disso e da propriedade do item b desta atividade, elabore uma definição para a curva que você encontrou como um lugar geométrico.

**Figura 12** – Hipérbole e seus elementos

Fonte: André M. dos Santos (2020).

- 6) As atividades anteriores nos permitem fazer uma generalização das cônicas, de modo que cada uma delas fica determinada pelos valores da excentricidade. Sabendo disso, preencha a tabela a seguir:

**Tabela 1** – Valor da excentricidade

Valor da excentricidade	Cônica correspondente
$0 < e < 1$	
$e > 1$	
$e = 1$	

Fonte: As autoras (2019).

**BNCC**

A proposta do conjunto de ações organizadas nas atividades da “Prática 3 – Cônicas e lugares geométricos” consiste em ler, recortar, colar, resolver problemas e mobilizar procedimentos que permitam elaborar estratégias de observações, investigações, análises, questionamentos e registros do processo e dos resultados obtidos. Essas ações podem, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmico. Dessa maneira, tal proposta possibilita que os/as estudantes desenvolvam habilidades relativas aos processos de investigação, de construção, de modelos e de resolução de problemas, em uma dinâmica que mobilize seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

As atividades da Prática 3 compreendem as seguintes competências específicas e suas habilidades específicas:

**Competência 1:** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas.

**Habilidade (EM13MAT302):** Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

**Competência 3:** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – aritmética, álgebra, grandezas e medidas, geometria –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

**Habilidade (EM13MAT308):** Resolver e elaborar problemas em variados contextos envolvendo triângulos, nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

**Competência 5:** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

**Habilidade (EM13MAT509):** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.

## PRÁTICA 4 – Cônicas e geometria analítica

### Preparação para a prática:

- Para realizar essa prática, você precisará saber determinar algebricamente a distância entre dois pontos e a distância entre um ponto e uma reta; saber traçar plano cartesiano e localizar pontos nesse plano; saber deduzir equações algébricas.

### Objetivos:

- Definir cônicas como lugares geométricos.
- Estudar equações de cônicas a partir de suas propriedades como lugares geométricos.
- Definir excentricidade de uma cônica.
- Diferenciar excentricidade de parábola, hipérbole e elipse.
- Ampliar os conhecimentos históricos sobre as cônicas.

### 1. Fundamentação teórica

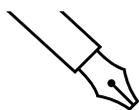
Na Idade Moderna, o interesse pelas cônicas foi renovado devido às suas aplicações a situações práticas, como, por exemplo, em astronomia, balística, perspectiva, ótica. Desde o ano de 1604, Johannes Kepler (1571-1630) desenvolveu estudos sobre cônicas em seus trabalhos sobre ótica e espelhos parabólicos e concluiu, em 1609, que as órbitas dos planetas são elípticas. Kepler passou a definir cinco espécies de cônicas – círculos, retas, elipses, parábolas e hipérbolas –, que se transformam umas nas outras com o distanciamento ou aproximação entre os focos das curvas. Galileu Galilei (1564-1642) também se interessou pelas cônicas e mostrou aplicações da parábola no lançamento de projéteis. Naquela época, vários estudiosos se dedicaram à criação de máquinas para o traçado de cônicas, entre eles, René Descartes (1596-1650).

Além disso, a álgebra, que estava sendo desenvolvida naquele período, possibilitou uma nova abordagem das cônicas. Descartes, no apêndice *Geometria*, da obra *Discurso do Método*, utilizou a álgebra para tratar problemas geométricos, mas nesse apêndice há pouco do que conhecemos hoje por geometria analítica, pois Descartes não utilizou um sistema de coordenadas retangulares e, portanto, não há as fórmulas que conhecemos atualmente. No entanto, na *Geometria*, Descartes chegou à equação geral de uma cônica passando pela origem, ou seja:  $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$ . Pierre de Fermat (1607-1665) também se dedicou às cônicas e mostrou que  $xy = k^2$  é equação de uma hipérbole.

Enquanto isso, o sistema de coordenadas retangulares estava se desenvolvendo na elaboração de mapas que, na época, eram denominados “cartas”. Daí, o sistema ser das cartas, ou “cartesiano”. Com esse sistema de coordenadas e a linguagem algébrica desenvolvida foram possíveis novas abordagens às cônicas (cf. BRITO; DEZOTTI, 2001).

## 2. Procedimento experimental

Consiste na construção de um artefato para o traçado de parábolas, com o objetivo de abordar as cônicas sob a perspectiva da geometria analítica. O uso do “parabológrafo” (adaptado para sala de aula) para o traçado de parábola em situação do plano cartesiano permite compreender a parábola e sua equação na perspectiva da geometria analítica.



Recomenda-se ao estudante registrar o processo de desenvolvimento das atividades: suas tentativas, questionamentos, desafios encontrados, resultado parcial e resultado final. O/a professor/a pode solicitar uma discussão dos registros entre os alunos ou grupo de alunos.

## 2.1 Materiais

Para esta atividade você precisará de folhas de papel milimetrado; um esquadro (30°, 60°, 90°); uma régua; 6 cm de barbante com margem para firmar suas extremidades, uma na tachinha e outra no esquadro; fita adesiva, uma placa de isopor de tamanho igual ou maior que papel milimetrado ou outro material em que você possa fixar uma tachinha; uma tachinha, preferencialmente o uso de lápis.

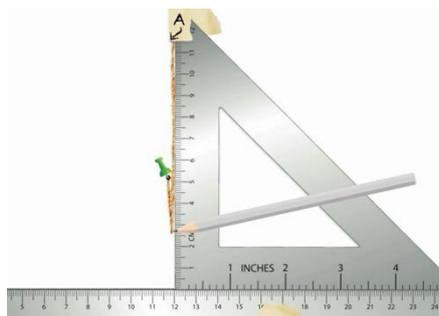
## 2.2. Metodologia

### Traçando a parábola.

Construção de um parabológrafo caseiro para traçar parábolas, identificar elementos e propriedades. Esta atividade é recomendada ser realizada em grupo de duas ou três pessoas.

Fixe o papel milimetrado no isopor. Amarre uma extremidade do barbante na tachinha e prenda a outra extremidade com fita adesiva no esquadro (no cateto de maior medida e na proximidade no ângulo de 30°). Finque a tachinha próximo ao centro do papel milimetrado. A régua serve de suporte para deslizar o esquadro, pelo cateto de menor lado.

**Figura 13** – Parabológrafo caseiro

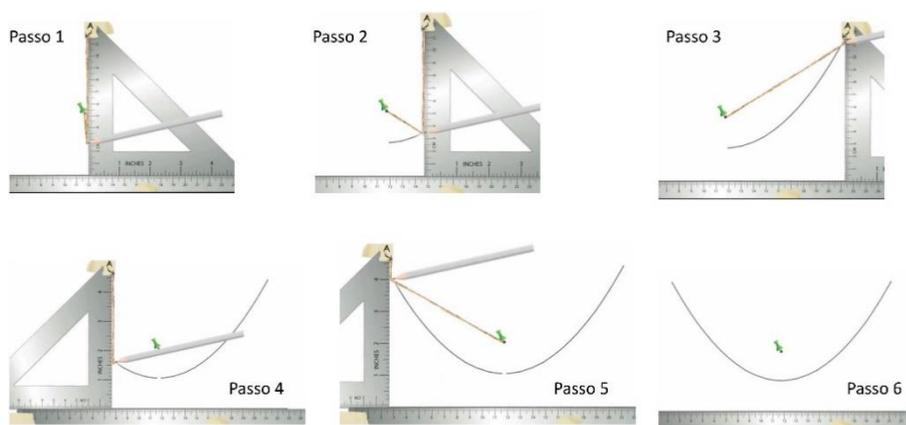


Fonte: Tracciare una parábola (2015).

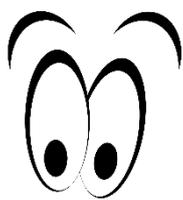
Para traçar a parábola, siga os passos:

- Dê preferência para alinhar o esquadro e a régua às linhas do papel milimetrado.
- Na vertical, alinhe o maior lado do cateto do esquadro com a tachinha e use a régua como suporte (“trilho”) para deslizar a base do esquadro (cateto menor). O barbante não deve estar esticado. É necessário ter folga, que pode ser ajustada movendo o esquadro na vertical.
- Alinhados na vertical o esquadro, a tachinha e o barbante, e a régua ajustada à base, coloque a ponta do lápis no barbante, esticando-o sem perder o alinhamento inicial. Na sequência, deslize com cuidado o esquadro sobre a régua e deixe a ponta do lápis mover-se sem perder o contato com o esquadro e o barbante. Nesse movimento, trace um lado da parábola. Repita o processo para traçar o outro lado da parábola. Veja o passo a passo para traçar a parábola na figura 14.

**Figura 14** – Passo a passo para traçar a parábola



Fonte: As autoras (2021).



**Observação:** Caso queira ver a construção e o funcionamento deste processo, há diversos vídeos disponíveis na internet. Basta buscar com as palavras-chave: parabológrafo, parabológrafo caseiro, parabológrafo casero.

**DICAS:**

Links de sites para visualizar construção e funcionamento:

<https://www.youtube.com/watch?v=eimADB2IYM>

<https://youtu.be/5wAEXvK4vS8>

Link de animação do traçado da parábola (Geogebra):

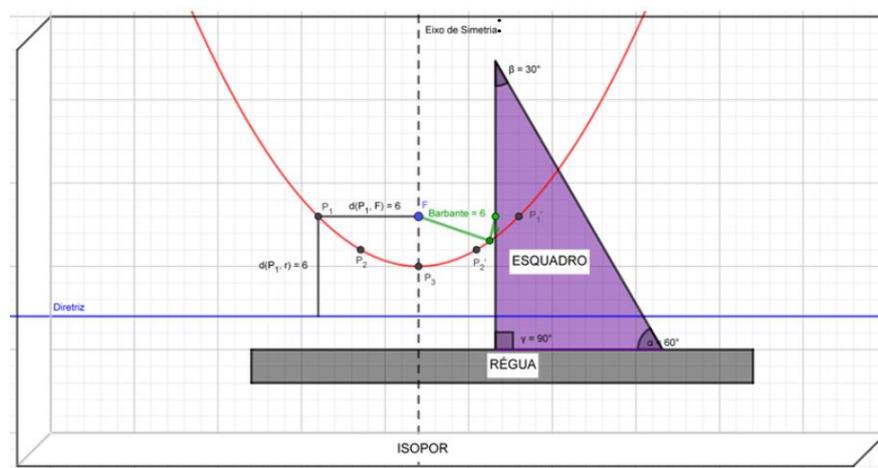
<https://www.youtube.com/watch?v=xQESrt4XULw>

**3. Atividades**

- 1) Observe o procedimento usado para traçar a parábola com o barbante. Marque os pontos notáveis da parábola e trace seu eixo de simetria.
- 2) No lado oposto do vértice  $V$ , no eixo de simetria, marque a distância  $FV$ . Pelo novo ponto passe uma reta perpendicular. Que reta é essa?
- 3) Na parábola, marque três pontos distintos  $P_1, P_2, P_3$  e trace a distância desses pontos ao foco  $F$ :  $P_1F, P_2F, P_3F$ . Trace também a distância dos pontos  $P_1, P_2, P_3$  a diretriz  $d$ :  $P_1'd, P_2'd, P_3'd$ . Que propriedade é possível perceber?
- 4) Trace os eixos  $Ox$  e  $Oy$  de um plano cartesiano no papel milimetrado, de modo que o eixo  $Oy$  coincida com o eixo de simetria da parábola e vértice  $V$  dessa curva com a origem do plano cartesiano.
- 5) Marque, de maneira genérica  $(x, y)$ , as coordenadas cartesianas presentes em todos os pontos anteriormente demarcados.
- 6) Sabendo que a distância  $D(F, P) = D(P, P')$  desenvolva a equação da parábola.

- 7) Nessa mesma atividade, agora inverta: considere o eixo OX do plano cartesiano passando pelo eixo de simetria e o eixo OY paralelo à diretriz d. Marque, de maneira genérica  $(x, y)$ , as coordenadas cartesianas presentes em todos os pontos. Sabendo que a distância  $D(F, P) = D(P, P')$ , desenvolva a equação da parábola.
- 8) O que foi possível deduzir na troca das coordenadas cartesianas no eixo de simetria?

**Figura 15** – Parabológrafo e a parábola



Fonte: André M. dos Santos (2020).

## BNCC

A proposta do conjunto de ações organizadas nas atividades da “Prática 4 – Cônicas e geometria analítica” consiste em ler, recortar, colar, resolver problemas e mobilizar procedimentos que permitam elaborar estratégias de observações, investigações, análises, questionamentos e registros do processo e dos resultados obtidos. Essas ações podem, de acordo com a BNCC, estimular e provocar o processo de reflexão e de abstração, sustentados no modo de pensar criativo, analítico, indutivo, dedutivo e sistêmico. Dessa maneira, tal proposta possibilita que os/as estudantes desenvolvam habilidades relativas aos processos de investigação, de construção, de modelos e de resolução de problemas, em uma dinâmica que mobilize seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base

em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.

As atividades da Prática 4 compreendem as seguintes competências específicas e suas habilidades específicas:

**Competência 1:** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas.

**Habilidade (EM13MAT302):** Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

**Habilidade (EM13MAT503):** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da matemática financeira ou da cinemática, entre outros.

**Competência 3:** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – aritmética, álgebra, grandezas e medidas, geometria –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

**Habilidade (EM13MAT308):** Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

**Competência 5:** Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

**Habilidade (EM13MAT509):** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.

#### 4. Referências

BOYER, C. *História da matemática*. Tradução Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base nacional curricular comum: ensino médio*. Brasília: MEC, 2017.

BRITO, A. J.; DEZOTTI, C. H. *Concretizando as cônicas*. Minicurso apresentado na CIENTEC. Natal: UFRN, 2001 (mimeo).

MOURA, E. C. M.; BRITO, A. J. A história da matemática em sequências didáticas na formação inicial de professores. *Revista Educação Teoria e Prática*, Rio Claro, v. 29, n. 69, p. 609-625, 2019.

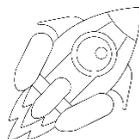
ROONEY, A. *A história da matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*. São Paulo: M. Books do Brasil Editora, 2012. 216 p.

TRACCIARE una parábola (tratto da Matematica Multimediale v. 2). Publicado pelo canal Zanichelli editore, 24 de agosto 2015. 1 vídeo (2,36 min). Disponível em: [https://www.youtube.com/watch?v=\\_eimADB2IYM&t=5s](https://www.youtube.com/watch?v=_eimADB2IYM&t=5s). Acesso em: 12 jan. 2021.

## ALGUMAS PALAVRAS FINAIS

No passo a passo das diretrizes das atividades deste Manual de Cônicas, os/as estudantes são convidados a fazer fazendo. Um trabalho com o uso das mãos, em um constante fazer pensando, que remete às ideias de John Dewey (1859-1952) sobre a ação de fazer para aprender.

Ao fazer as atividades de práticas sobre cônicas, a ação está voltada no/na aprendiz e quem narra o conteúdo é o fazer do aluno, ao ler, interpretar, cortar, colar, montar, traçar, analisar em um constante ir e vir de ideias e tentativas, sob a mediação do/da professor/a. Na narrativa, constam personagens históricos e contextos em diversos tempos, lugares e culturas que possibilitam reflexões em um vai e vem temporal do passado, presente e futuro das cônicas, em um resgate de conceitos desenvolvidos ao longo da história da matemática e da história da educação matemática.





Este manual didático oferece uma visão panorâmica da trajetória histórica das cônicas sob uma abordagem de atividades práticas com uso da história da matemática. Destinado aos alunos e professores do ensino médio e da formação inicial de professores de matemática, o manual explora aspectos de cortes do cone, lugar geométrico e geometria analítica para o estudo das cônicas. Busca-se destacar o desenvolvimento da matemática como um processo gradual, ao longo da história, de construção de conhecimento por diversas pessoas, de várias culturas, em distintos tempos históricos.